Kongruencje

1. Udowodnij, że $53^{53} - 33^{33}$ jest podzielne przez 10.
2. Czy któraś z liczb: 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... itd. jest kwadratem liczby naturalnej?
3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n:
   a). $6 \mid n^3 - n$
   b). $30 \mid n^5 - n$
4. Wykaż, że dla każdej liczby pierwszej p>3 liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.
5. Wykaż, że dla każdej liczby pierwszej p>5 liczba $p^4 - 1$ jest podzielna przez 240.
6. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że podane poniżej liczby są również liczbami pierwszymi.
   a). $p + 2$ i $p + 4$
   b). $p + 6, p + 12, p + 18, p + 24$
7. Znajdź wszystkie liczby $n \in \mathbb{N}$ takie, że liczby $5^n - 2$ i $5^n + 2$ są pierwsze.
8. Wyznacz wszystkie $n \in \mathbb{N}$, dla których $5 \mid 1 + 2^n + 3^n + 4^n$.
9. Wyznacz wszystkie liczby całkowite nieujemne n, dla których liczba $2^{2^n} + 5$ jest pierwsza.
10. Udowodnij, że nie istnieją liczby naturalne n i m większe od 1 spełniające równość
$$102^{1991} + 103^{1991} = m^n.$$
11. Niech $m \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że jeżeli $2^m + 1$ jest liczbą pierwszą większą od 3, to m jest liczbą parzystą.
12. Udowodnij, że jeżeli p jest liczbą pierwszą, to liczba $2^p + 3^p$ nie jest potęgą żadnej liczby naturalnej.
13. Niech $a \in \mathbb{N}$, $S = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$. Udowodnij, że $S \equiv 1 \pmod{10}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \equiv 1 \pmod{10}$ i $n \equiv 1 \pmod{10}$.
14. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby $2^{5^1} + 2^{5^2} + 2^{5^3} + \ldots + 2^{5^{1991}}$.
15. Liczby naturalne $a_1, a_2, \ldots, a_{1994}$ spełniają warunek $a_1 + a_2 + \ldots + a_{1994} = 1994^{1994}$.
    Wyznacz resztę z dzielenia przez 6 liczby $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{1994}^3$.
16. Wykaż, że jeżeli długości boków trójkąta prostokątnego są liczbami naturalnymi, to istnieją boki o długościach podzielnych przez 3, 4, 5.
17. Udowodnij, że liczba $3^n + 2 \cdot 17^n$ nie jest kwadratem liczby naturalnej dla żadnego całkowitego $n \geqslant 0$.
18. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $3^{2n-1} + 7^{2n-1}$ jest podzielna przez 10.