Geometria kombinatoryczna - kolorowanie

1. a). W turnieju szachowym uczestniczy 6 osób, każdy z każdym rozgrywa jedną partię. Rozgrywki odbywają się w Katowicach i Poznaniu. Wykaż, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.
   b). Każde trzy z sześciu danych punktów płaszczyzny są wierzchołkami trójkąta o bokach różnej długości. Udowodnij, że najkrótszy bok jednego z trójkątów jest jednocześnie najdłuższym bokiem innego.

2. Na okręgu mamy dane 2009 punktów białych i jeden punkt czarny. Rozważmy wielokąty, których wierzchołkami są dane punkty. Których figur jest więcej: zawierających tylko wierzchołki białe czy jeden czarny? Odpowiedź uzasadnij.

3. Wypukły n-kąt podzielono przekątnymi na trójkąty tak, by dwie przekątne nie miały wspólnych punktów wewnętrznych. Okazało się, że z każdego wierzchołka wychodzi parzysta liczba przekątnych.
   Wykaż, że n jest podzielne przez 3. W tym celu udowodnij następujący lemat:
   Jeśli figurę na płaszczyźnie podzielono prowadząc k prostych, to można pozostałe części pomalować dwoma kolorami tak, by każde dwie mające bok wspólny były różnych kolorów.

4. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na biało albo czarno. Udowodnij, że na płaszczyźnie tej znajdziemy 4 punkty jednakowego koloru takie, że jeden z nich jest środkiem ciężkości trójkąta o wierzchołkach w trzech pozostałych punktach.

5. Każdy punkt przestrzeni pomalowano na biało albo czarno. Udowodnij, że w przestrzeni tej znajdziemy 5 punktów jednakowego koloru takich, że jeden z nich jest środkiem ciężkości czworościanu o wierzchołkach w czterech pozostałych punktach.

6. Każdy punkt sfery pomalowano na biało albo czarno. Udowodnij, że na sferze tej znajdziemy trzy punkty jednakowego koloru, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

7. W sześciokącie foremnym pewne pary wierzchołków połączono odcinkiem i każdy z nich pomalowano na niebiesko albo na czerwono. Wykaż, że:
   a). jeżeli poprowadzono 15 odcinków, to znajdziemy co najmniej dwa trójkąty, których wierzchołki są wierzchołkami danego sześciokąta, a boki są jednego koloru;
   b). można poprowadzić 14 odcinków tak, aby żaden trójkąt nie był jednokolorowy.

8. Każdy punkt przestrzeni pokolorowano na biało albo czarno. Rozstrzygnij, czy zawsze znajdziemy trójkąt równoboczny o boku długości 1 i o wierzchołkach jednego koloru.

9. Wszystkie krawędzie boczne i wszystkie przekątne podstawy pewnego ostrosłupa dziewięciokątnego pomalowano na biało albo czarno. Udowodnij, że pewne trzy wierzchołki tego ostrosłupa wyznaczają trójkąt o bokach jednego koloru.