Indukcja matematyczna

1. Wykaż, że dla dowolnego n naturalnego oraz x rzeczywistego zachodzi nierówność
$$|\sin nx| \leqslant n\,|\sin x|$$
Wskazówka: skorzystaj ze wzoru $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

2. Wyznacz liczbę odcinków łączących n punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe.

3. Wyznacz liczbę przekątnych w n-kącie wypukłym.

4. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są równości:
a). $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
b). $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

5. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą następujące równości:
a). $\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{3} = 2\sin\frac{n\pi}{6}\sin\frac{(n+1)\pi}{6}$
b). $\sin x + \sin(x+h) + \ldots + \sin(x+nh) = \frac{\sin(x+\frac{nh}{2})\cdot\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$
gdzie $h \neq 2k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ zaś n jest dwolną liczbą naturalną
c). $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $x \neq 2k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$
d). $\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$ dla x takich jak w c).
e). $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos kx = \frac{(-1)^n\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\cos\frac{x}{2}}$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $x \neq (2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$
Wskazówka: skorzystaj ze wzoru $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

6. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ spełnione są nierówności:
a). $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$
b). $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$

7. Wykaż,że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą równości:
a). $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$
b). $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$

8. Wykaż, że $1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$.

9. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:
a). liczba $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ jest podzielna przez 133
b). liczba $10^{3n+1} - 3(-1)^n$ jest podzielna przez 7
c). licza $n^3 - 3n^2 + 2n - 3$ jest podzielna przez 3
d). liczba $2^{2^n} - 6$ jest podzielna przez 10, (dla $n \geqslant 2$)
e). liczba $5\cdot7^{2(n+1)} + 2^{3n}$ jest podzielna przez 41

10. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n, spełniającej podany warunek, zachodzi nierówność:
a). $3^{n+1} > 4n + 7$, $(n \geqslant 2)$
b). $2^n > n^2$, $(n \geqslant 5)$
c). $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$, $(n \geqslant 2)$
d). $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$, $(n \geqslant 1)$
e). $3^n > n\cdot2^n$, $(n \geqslant 3)$

11. Niech $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ oraz niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dowolnymi liczbami tego samego znaku takimi, że $a_k > -1$ oraz $a_k \neq 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Udowodnij, że zachodzi nierówność:
$(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) > 1 + a_1 + \ldots + a_n$ zwana *nierównością Weierstrassa.*

12. Wykaż, że suma $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ jest liczbą naturalną dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

13. Wykaż, że wielomian $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ jest podzielny przez trójmian $x^2 - 2x + 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.