RÓWNANIA DIOFANTYCZNE

Beata Łojan
b.lojan@knm.katowice.pl

Koło Naukowe Matematyków
Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach
www.knm.katowice.pl

Dąbrowa Górnicza, 21 listopada 2011

1. Algorytm Euklidesa

2. Równania diofantyczne
   - Równania diofantyczne stopnia pierwszego
   - Równania diofantyczne stopnia drugiego — równanie Pitagorasa
   - Równania wyższych rzędów — równanie Fermata

1. Algorytm Euklidesa

2. Równania diofantyczne
   - Równania diofantyczne stopnia pierwszego
   - Równania diofantyczne stopnia drugiego — równanie Pitagorasa
   - Równania wyższych rzędów — równanie Fermata

3. Zastosowania
   - zadanie 1 — ile biletów?
   - zadanie 2 — układ równań
   - zadanie 3 — ile lat żył Diofantos?

1. Algorytm Euklidesa

2. Równania diofantyczne
   - Równania diofantyczne stopnia pierwszego
   - Równania diofantyczne stopnia drugiego — równanie Pitagorasa
   - Równania wyższych rzędów — równanie Fermata

3. Zastosowania
   - zadanie 1 — ile biletów?
   - zadanie 2 — układ równań
   - zadanie 3 — ile lat żył Diofantos?

4. Literatura

Przypomnienie

Definicja

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$. Mówimy, że a jest *podzielne z resztą* przez b jeśli istnieją takie liczby $q \in \mathbb{Z}$ i $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, że $a = bq + r$ oraz $0 \leqslant r < |b|$.

Definicja

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$. Mówimy, że a jest *podzielne* przez b jeśli istnieje taka liczba całkowita a, że $a = bq$ (czyli reszta z dzielenia $r = 0$). Wtedy b nazywamy *dzielnikiem* liczby a.

Przypomnienie NWD i NWW

Największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitych a i b nazywamy liczbę naturalną d, która jest wspólnym dzielnikiem liczb a i b oraz każdy inny wspólny dzielnik liczb a i b dzieli d.
Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb całkowitych a i b nazywamy najmniejszą liczbę naturalną w, której dzielnikami są liczby a i b, przy czym jeśli istnieje jakaś inna liczba w' o tych własnościach, to liczba w jest jej dzielnikiem.

Przypomnienie

Definicja

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$. Mówimy, że a jest *podzielne z resztą* przez b jeśli istnieją takie liczby $q \in \mathbb{Z}$ i $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, że $a = bq + r$ oraz $0 \leqslant r < |b|$.

Definicja

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$. Mówimy, że a jest *podzielne* przez b jeśli istnieje taka liczba całkowita a, że $a = bq$ (czyli reszta z dzielenia $r = 0$). Wtedy b nazywamy *dzielnikiem* liczby a.

Przypomnienie NWD i NWW

Największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitych a i b nazywamy liczbę naturalną d, która jest wspólnym dzielnikiem liczb a i b oraz każdy inny wspólny dzielnik liczb a i b dzieli d.
Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb całkowitych a i b nazywamy najmniejszą liczbę naturalną w, której dzielnikami są liczby a i b, przy czym jeśli istnieje jakaś inna liczba w' o tych własnościach, to liczba w jest jej dzielnikiem.

Przypomnienie

Definicja

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$. Mówimy, że a jest *podzielne z resztą* przez b jeśli istnieją takie liczby $q \in \mathbb{Z}$ i $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, że $a = bq + r$ oraz $0 \leqslant r < |b|$.

Definicja

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$. Mówimy, że a jest *podzielne* przez b jeśli istnieje taka liczba całkowita a, że $a = bq$ (czyli reszta z dzielenia $r = 0$). Wtedy b nazywamy *dzielnikiem* liczby a.

Przypomnienie NWD i NWW

Największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitych a i b nazywamy liczbę naturalną d, która jest wspólnym dzielnikiem liczb a i b oraz każdy inny wspólny dzielnik liczb a i b dzieli d.
Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb całkowitych a i b nazywamy najmniejszą liczbę naturalną w, której dzielnikami są liczby a i b, przy czym jeśli istnieje jakaś inna liczba w' o tych własnościach, to liczba w jest jej dzielnikiem.

Algorytm Euklidesa

Algorytm Euklidesa

Jest to algorytm do obliczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb całkowitych. Jest to jeden z najstarszych algorytmów — został opisany przez Euklidesa ok. roku 300 p.n.e. Opiera się on na spostrzeżeniu, że jeśli od większej liczby odejmiemy mniejszą, to mniejsza liczba i otrzymana różnica będą miały taki sam największy wspólny dzielnik jak pierwotne liczby. Jeśli w wyniku kolejnego odejmowania otrzymamy parę równych liczb, oznacza to, że znaleźliśmy NWD. Można również zamiast odejmować brać reszty z dzielenia większej liczby przez mniejszą — gdy reszta dojdzie do zera, to kończymy, a NWD jest równe przedostatniej reszcie.

Algorytm Euklidesa – konstrukcja

Konstrukcja

Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{N}$ oraz $a \geqslant b$. Dzieląc z resztą a przez b otrzymujemy

Algorytm Euklidesa – konstrukcja

Konstrukcja

Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{N}$ oraz $a \geqslant b$. Dzieląc z resztą a przez b otrzymujemy

$$a = bq_1 + r_1, \qquad 0 \leqslant r_1 < b$$

Algorytm Euklidesa – konstrukcja

Konstrukcja

Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{N}$ oraz $a \geqslant b$. Dzieląc z resztą a przez b otrzymujemy

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 \leqslant r_1 < b \\ b &= r_1 q_2 + r_2, & 0 \leqslant r_2 < r_1 \end{aligned}$$

Ostatecznie dostajemy, że

$$\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(b, r_1) =$$

Algorytm Euklidesa – konstrukcja

Konstrukcja

Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{N}$ oraz $a \geqslant b$. Dzieląc z resztą a przez b otrzymujemy

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 \leqslant r_1 < b \\ b &= r_1 q_2 + r_2, & 0 \leqslant r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, & 0 \leqslant r_3 < r_2 \end{aligned}$$

Ostatecznie dostajemy, że

$$\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(b, r_1) = \mathrm{NWD}(r_1, r_2) =$$

Algorytm Euklidesa – konstrukcja

Konstrukcja

Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{N}$ oraz $a \geqslant b$. Dzieląc z resztą a przez b otrzymujemy

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 \leqslant r_1 < b \\ b &= r_1 q_2 + r_2, & 0 \leqslant r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, & 0 \leqslant r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, & 0 \leqslant r_n < r_{n-1} \end{aligned}$$

Ostatecznie dostajemy, że

$$\begin{aligned} \mathrm{NWD}(a,b) = \mathrm{NWD}(b,r_1) = \mathrm{NWD}(r_1,r_2) = \mathrm{NWD}(r_2,r_3) = \cdots = \\ = \mathrm{NWD}(r_{n_2}, r_{n-1}) = \end{aligned}$$

Algorytm Euklidesa – konstrukcja

Konstrukcja

Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{N}$ oraz $a \geqslant b$. Dzieląc z resztą a przez b otrzymujemy

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1, & 0 \leqslant r_1 < b \\
b &= r_1 q_2 + r_2, & 0 \leqslant r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, & 0 \leqslant r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, & 0 \leqslant r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0
\end{aligned}$$

Ostatecznie dostajemy, że

$$\begin{aligned}
\mathrm{NWD}(a, b) = \mathrm{NWD}(b, r_1) = \mathrm{NWD}(r_1, r_2) = \mathrm{NWD}(r_2, r_3) = \cdots = \\
= \mathrm{NWD}(r_{n_2}, r_{n-1}) = \mathrm{NWD}(r_{n-1}, r_n) = r_n.
\end{aligned}$$

Algorytm Euklidesa — przykład

Przykład

Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(26, 10)$. Mamy:

Algorytm Euklidesa — przykład

Przykład

Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(26, 10)$. Mamy:

$$26 = 10 \cdot 2 + 6$$

Algorytm Euklidesa — przykład

Przykład

Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(26, 10)$. Mamy:

$$26 = 10 \cdot 2 + 6$$
$$10 = 6 \cdot 1 + 4$$

Algorytm Euklidesa — przykład

Przykład

Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(26, 10)$. Mamy:

$$26 = 10 \cdot 2 + 6$$
$$10 = 6 \cdot 1 + 4$$
$$6 = 4 \cdot 1 + 2$$

Algorytm Euklidesa — przykład

Przykład

Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(26, 10)$. Mamy:

$$\begin{aligned} 26 &= 10 \cdot 2 + 6 \\ 10 &= 6 \cdot 1 + 4 \\ 6 &= 4 \cdot 1 + 2 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Algorytm Euklidesa — przykład

Przykład

Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(26, 10)$. Mamy:

$$\begin{aligned} 26 &= 10 \cdot 2 + 6 \\ 10 &= 6 \cdot 1 + 4 \\ 6 &= 4 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Algorytm Euklidesa — przykład

Przykład

Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(26, 10)$. Mamy:

$$\begin{aligned} 26 &= 10 \cdot 2 + 6 \\ 10 &= 6 \cdot 1 + 4 \\ 6 &= 4 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Zatem NWD$(26, 10) = 2$.

Algorytm Euklidesa — przykład

Przykład

Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(26, 10)$. Mamy:

$$\begin{aligned} 26 &= 10 \cdot 2 + 6 \\ 10 &= 6 \cdot 1 + 4 \\ 6 &= 4 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Zatem NWD$(26, 10) = 2$.

Twierdzenie

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Wtedy istnieją takie liczby całkowite x, y, że

$$\text{NWD}(a, b) = ax + by.$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$a = bq_1 + r_1, \qquad r_1 = a - bq_1,$$

$$\Rightarrow$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & r_1 &= a - bq_1, \\ b &= r_1 q_2 + r_2, & r_2 &= b - r_1 q_2, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1 q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1 q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2 q_3, \end{aligned}$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1 q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1 q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2 q_3, \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1} q_n, \end{aligned}$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1 q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1 q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2 q_3, \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1} q_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} \end{aligned}$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1 q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1 q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2 q_3, \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1} q_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} \end{aligned}$$

„Odwracając” algorytm Euklidesa dostajemy:

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1 q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1 q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2 q_3, \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1} q_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} \end{aligned}$$

„Odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$r_1 = a - bq_1 = a + b(-q_1)$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1 q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1 q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2 q_3, \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1} q_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} \end{aligned}$$

„Odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$r_1 = a - bq_1 = a + b(-q_1)$$

$$r_2 = b - r_1 q_2 =$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2q_3, \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1}q_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} \end{aligned}$$

„Odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$r_1 = a - bq_1 = a + b(-q_1)$$
$$r_2 = b - r_1q_2 = b - (a + b(-q_1))q_2 = a(-q_2) + b(1 + q_1q_2)$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2q_3, \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1}q_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} \end{aligned}$$

„Odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$r_1 = a - bq_1 = a + b(-q_1)$$
$$r_2 = b - r_1q_2 = b - (a + b(-q_1))q_2 = a(-q_2) + b(1 + q_1q_2)$$
$$r_3 = r_1 - r_2q_3 =$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2q_3, \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1}q_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} \end{aligned}$$

„Odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$r_1 = a - bq_1 = a + b(-q_1)$$
$$r_2 = b - r_1q_2 = b - (a + b(-q_1))q_2 = a(-q_2) + b(1 + q_1q_2)$$
$$r_3 = r_1 - r_2q_3 = a + b(-q_1) - (a(-q_2) + b(1 + q_1q_2))q_3 =$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1 q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1 q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2 q_3, \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1} q_n, \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} \end{aligned}$$

„Odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} r_1 &= a - bq_1 = a + b(-q_1) \\ r_2 &= b - r_1 q_2 = b - (a + b(-q_1))q_2 = a(-q_2) + b(1 + q_1 q_2) \\ r_3 &= r_1 - r_2 q_3 = a + b(-q_1) - (a(-q_2) + b(1 + q_1 q_2))q_3 = \\ &= a(1 + q_2 q_3) + b(-q_1 - q_3 - q_1 q_2 q_3). \end{aligned}$$

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2q_3, \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1}q_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} \end{aligned}$$

„Odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} r_1 &= a - bq_1 = a + b(-q_1) \\ r_2 &= b - r_1q_2 = b - (a + b(-q_1))q_2 = a(-q_2) + b(1 + q_1q_2) \\ r_3 &= r_1 - r_2q_3 = a + b(-q_1) - (a(-q_2) + b(1 + q_1q_2))q_3 = \\ &= a(1 + q_2q_3) + b(-q_1 - q_3 - q_1q_2q_3). \end{aligned}$$

Postępując tak dalej mamy $r_n = 0$ oraz

Konstrukcja (metoda wyznaczania X i Y)

Metoda wyznaczania $x, y \in \mathbb{Z}$ wynika z algorytmu Euklidesa. Istotnie, dla $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant b$ mamy:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} r_1 &= a - bq_1, \\ r_2 &= b - r_1q_2, \\ r_3 &= r_1 - r_2q_3, \\ &\vdots \\ r_n &= r_{n-2} - r_{n-1}q_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} \end{aligned}$$

„Odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} r_1 &= a - bq_1 = a + b(-q_1) \\ r_2 &= b - r_1q_2 = b - (a + b(-q_1))q_2 = a(-q_2) + b(1 + q_1q_2) \\ r_3 &= r_1 - r_2q_3 = a + b(-q_1) - (a(-q_2) + b(1 + q_1q_2))q_3 = \\ &= a(1 + q_2q_3) + b(-q_1 - q_3 - q_1q_2q_3). \end{aligned}$$

Postępując tak dalej mamy $r_n = 0$ oraz

a(coś zależnego od $q_1, \ldots, q_n$) + b(coś zależnego od $q_1, \ldots, q_n$) $= ax + by$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$234 = 164 \cdot 1 + 70$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$234 = 164 \cdot 1 + 70$$

$$164 = 70 \cdot 2 + 24$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$234 = 164 \cdot 1 + 70$$
$$164 = 70 \cdot 2 + 24$$
$$70 = 24 \cdot 2 + 22$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + 2 \end{aligned}$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + 2 \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Mamy zatem, że NWD$(234, 164) = 2$, a „odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Mamy zatem, że NWD$(234, 164) = 2$, a „odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$2 = 24 - 22 \cdot 1 =$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Mamy zatem, że NWD$(234, 164) = 2$, a „odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$2 = 24 - 22 \cdot 1 = 24 - (70 - 24 \cdot 2) =$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Mamy zatem, że NWD$(234, 164) = 2$, a „odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$2 = 24 - 22 \cdot 1 = 24 - (70 - 24 \cdot 2) = 24 - 70 \cdot 1 + 24 \cdot 2 =$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Mamy zatem, że NWD$(234, 164) = 2$, a „odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} 2 &= 24 - 22 \cdot 1 = 24 - (70 - 24 \cdot 2) = 24 - 70 \cdot 1 + 24 \cdot 2 = \\ &= 24 \cdot 3 - 70 \cdot 1 = \end{aligned}$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Mamy zatem, że NWD$(234, 164) = 2$, a „odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} 2 &= 24 - 22 \cdot 1 = 24 - (70 - 24 \cdot 2) = 24 - 70 \cdot 1 + 24 \cdot 2 = \\ &= 24 \cdot 3 - 70 \cdot 1 = 3(164 \cdot 1 - 70 \cdot 2) - 70 \cdot 1 = \end{aligned}$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Mamy zatem, że NWD$(234, 164) = 2$, a „odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} 2 &= 24 - 22 \cdot 1 = 24 - (70 - 24 \cdot 2) = 24 - 70 \cdot 1 + 24 \cdot 2 = \\ &= 24 \cdot 3 - 70 \cdot 1 = 3(164 \cdot 1 - 70 \cdot 2) - 70 \cdot 1 = 3 \cdot 164 - 6 \cdot 70 - 1 \cdot 70 = \end{aligned}$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Mamy zatem, że NWD$(234, 164) = 2$, a „odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} 2 &= 24 - 22 \cdot 1 = 24 - (70 - 24 \cdot 2) = 24 - 70 \cdot 1 + 24 \cdot 2 = \\ &= 24 \cdot 3 - 70 \cdot 1 = 3(164 \cdot 1 - 70 \cdot 2) - 70 \cdot 1 = 3 \cdot 164 - 6 \cdot 70 - 1 \cdot 70 = \\ &= 3 \cdot 164 - 7 \cdot 234 + 7 \cdot 164 = \end{aligned}$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Mamy zatem, że NWD$(234, 164) = 2$, a „odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} 2 &= 24 - 22 \cdot 1 = 24 - (70 - 24 \cdot 2) = 24 - 70 \cdot 1 + 24 \cdot 2 = \\ &= 24 \cdot 3 - 70 \cdot 1 = 3(164 \cdot 1 - 70 \cdot 2) - 70 \cdot 1 = 3 \cdot 164 - 6 \cdot 70 - 1 \cdot 70 = \\ &= 3 \cdot 164 - 7 \cdot 234 + 7 \cdot 164 = (-7) \cdot 234 + 10 \cdot 164 \end{aligned}$$

Przykład

Pokażemy na przykładzie jak wyznaczyć liczby X i Y. Niech $a = 234$ i $b = 164$. Korzystając z algorytmu Euklidesa wyznaczymy NWD$(234, 164)$:

$$\begin{aligned} 234 &= 164 \cdot 1 + 70 \\ 164 &= 70 \cdot 2 + 24 \\ 70 &= 24 \cdot 2 + 22 \\ 24 &= 22 \cdot 1 + \underbrace{2} \\ 22 &= 2 \cdot 11 + 0 \end{aligned}$$

Mamy zatem, że NWD$(234, 164) = 2$, a „odwracając" algorytm Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} 2 &= 24 - 22 \cdot 1 = 24 - (70 - 24 \cdot 2) = 24 - 70 \cdot 1 + 24 \cdot 2 = \\ &= 24 \cdot 3 - 70 \cdot 1 = 3(164 \cdot 1 - 70 \cdot 2) - 70 \cdot 1 = 3 \cdot 164 - 6 \cdot 70 - 1 \cdot 70 = \\ &= 3 \cdot 164 - 7 \cdot 234 + 7 \cdot 164 = (-7) \cdot 234 + 10 \cdot 164 \end{aligned}$$

Zatem $2 = (-7) \cdot 234 + 10 \cdot 164$, czyli $X = -7$, $Y = 10$.

Równania diofantyczne

Równanie diofantyczne

Równaniem diofantycznym nazywamy każde równanie, którego rozwiązań szukamy w zbiorze liczb całkowitych lub naturalnych. Nazwa tego typu równań pochodzi od greckiego matematyka Diofantosa (III w.n.e.). Zajmiemy się najprostszymi z nich, czyli równaniami liniowymi.

Równania diofantyczne

Ile lat żył Diofantos?

W XIV wieku grecki mnich Maksymus Planudes umieścił w swojej antologii wiersz „Epitafium Diofanta". Jego treść jest jednocześnie zadaniem tekstowym:

Pod tym nagrobkiem spoczywa Diofant – a dzięki przedziwnej
Sztuce zmarłego i wiek zdradzi ci ten głaz:
Chłopcem przez szóstą część życia pozostać bóg mu pozwolił,
Lica pokwitły mu zaś, kiedy dwunasta znów część
Życia minęła; a znowu żywota gdy przebył część siódmą,
Młodą małżonkę w dom dobry wprowadził mu bóg,
Która, gdy pięć lat minęło, małego powiła mu synka,
Ale okrutny chciał los, że kiedy syn ledwie wiek
Ojca w połowie osiągnął, ponury zabrał go Hades.
Kojąc ogromny swój ból, szukał Diofant wśród liczb
Jeszcze przez cztery lata pociechy, aż rozstał się z życiem.

Równania diofantyczne stopnia pierwszego

Definicja

Równaniem diofantycznym stopnia pierwszego nazywamy równanie liniowe postaci

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, a szukane rozwiązania (X, Y) są liczbami całkowitymi.

Równania diofantyczne stopnia pierwszego

Definicja

Równaniem diofantycznym stopnia pierwszego nazywamy równanie liniowe postaci

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, a szukane rozwiązania (X, Y) są liczbami całkowitymi.

Zauważmy, że dla $n = 1$ dostajemy równanie: $a_1X_1 = b$.

Równania diofantyczne stopnia pierwszego

Definicja

Równaniem diofantycznym stopnia pierwszego nazywamy równanie liniowe postaci

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, a szukane rozwiązania (X, Y) są liczbami całkowitymi.

Zauważmy, że dla $n = 1$ dostajemy równanie: $a_1X_1 = b$. Takie równanie ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $\Leftrightarrow a_1|b$ i wówczas $X = \frac{b}{a}$.

Równania diofantyczne stopnia pierwszego

Definicja

Równaniem diofantycznym stopnia pierwszego nazywamy równanie liniowe postaci

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, a szukane rozwiązania (X, Y) są liczbami całkowitymi.

Zauważmy, że dla $n = 1$ dostajemy równanie: $a_1X_1 = b$. Takie równanie ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $\Leftrightarrow a_1|b$ i wówczas $X = \frac{b}{a}$.
Rozważmy równanie $6X = 12$; oczywiście $6|12$ oraz $X = \frac{12}{6} = 2$.

Równania diofantyczne stopnia pierwszego

Definicja

Równaniem diofantycznym stopnia pierwszego nazywamy równanie liniowe postaci

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, a szukane rozwiązania (X, Y) są liczbami całkowitymi.

Zauważmy, że dla $n = 1$ dostajemy równanie: $a_1X_1 = b$. Takie równanie ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $\Leftrightarrow a_1|b$ i wówczas $X = \frac{b}{a}$.
Rozważmy równanie $6X = 12$; oczywiście $6|12$ oraz $X = \frac{12}{6} = 2$.
Dla $n = 2$ dostajemy równanie postaci $a_1X_1 + a_2X_2 = b$.

Równania diofantyczne stopnia pierwszego

Definicja

Równaniem diofantycznym stopnia pierwszego nazywamy równanie liniowe postaci

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, a szukane rozwiązania (X, Y) są liczbami całkowitymi.

Zauważmy, że dla $n = 1$ dostajemy równanie: $a_1X_1 = b$. Takie równanie ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $\Leftrightarrow a_1|b$ i wówczas $X = \frac{b}{a}$.
Rozważmy równanie $6X = 12$; oczywiście $6|12$ oraz $X = \frac{12}{6} = 2$.
Dla $n = 2$ dostajemy równanie postaci $a_1X_1 + a_2X_2 = b$. Kiedy takie równanie ma rozwiązanie? Jeśli zastosować rozumowanie powyżej, to można przyjąć, że takie równanie ma rozwiązanie, gdy $a_1|b$ i $a_2|b$.

Równania diofantyczne stopnia pierwszego

Definicja

Równaniem diofantycznym stopnia pierwszego nazywamy równanie liniowe postaci

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, a szukane rozwiązania (X, Y) są liczbami całkowitymi.

Zauważmy, że dla $n = 1$ dostajemy równanie: $a_1X_1 = b$. Takie równanie ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $\Leftrightarrow a_1|b$ i wówczas $X = \frac{b}{a}$.
Rozważmy równanie $6X = 12$; oczywiście $6|12$ oraz $X = \frac{12}{6} = 2$.
Dla $n = 2$ dostajemy równanie postaci $a_1X_1 + a_2X_2 = b$. Kiedy takie równanie ma rozwiązanie? Jeśli zastosować rozumowanie powyżej, to można przyjąć, że takie równanie ma rozwiązanie, gdy $a_1|b$ i $a_2|b$. Zauważmy jednak, że np. równanie $4X + 6Y = 10$ ma rozwiązanie $X = 10$ i $Y = -5$, pomimo iż $4 \nmid 10$ i $6 \nmid 10$.

Równania diofantyczne stopnia pierwszego

Definicja

Równaniem diofantycznym stopnia pierwszego nazywamy równanie liniowe postaci

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, a szukane rozwiązania (X, Y) są liczbami całkowitymi.

Zauważmy, że dla $n = 1$ dostajemy równanie: $a_1X_1 = b$. Takie równanie ma rozwiązanie w liczbach całkowitych $\Leftrightarrow a_1|b$ i wówczas $X = \frac{b}{a}$.
Rozważmy równanie $6X = 12$; oczywiście $6|12$ oraz $X = \frac{12}{6} = 2$.
Dla $n = 2$ dostajemy równanie postaci $a_1X_1 + a_2X_2 = b$. Kiedy takie równanie ma rozwiązanie? Jeśli zastosować rozumowanie powyżej, to można przyjąć, że takie równanie ma rozwiązanie, gdy $a_1|b$ i $a_2|b$. Zauważmy jednak, że np. równanie $4X + 6Y = 10$ ma rozwiązanie $X = 10$ i $Y = -5$, pomimo iż $4 \nmid 10$ i $6 \nmid 10$.
Jaki zatem warunek muszą spełniać współczynniki takiego równania, aby miało ono rozwiązanie? Mówi nam o tym następujące twierdzenie:

Rozwiązanie równania diofantycznego

Twierdzenie

Równanie diofantyczne

$$aX + bY = c$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $d|c$, gdzie $d = \mathrm{NWD}(a, b)$. Ponadto jeśli (X_0, Y_0) jest pewnym rozwiązaniem tego równania, to wszystkie inne rozwiązania mają postać:

$$\begin{cases} X = X_0 + \frac{b}{d}t, \\ Y = Y_0 - \frac{a}{d}t. \end{cases}$$

Rozwiązanie równania diofantycznego

Twierdzenie

Równanie diofantyczne

$$aX + bY = c$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $d|c$, gdzie $d = \mathrm{NWD}(a, b)$. Ponadto jeśli (X_0, Y_0) jest pewnym rozwiązaniem tego równania, to wszystkie inne rozwiązania mają postać:

$$\begin{cases} X = X_0 + \frac{b}{d}t, \\ Y = Y_0 - \frac{a}{d}t. \end{cases}$$

Ogólnie: Równanie diofantyczne

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{NWD}(a_1, \ldots, a_n) \mid b$.

Przykład

$2X + 6Y = 3$, $\mathrm{NWD}(2, 6) = 2$ i $2 \nmid 3$ zatem równanie nie ma rozwiązania,

Przykład

$2X + 6Y = 3$, $\mathrm{NWD}(2,6) = 2$ i $2 \nmid 3$ zatem równanie nie ma rozwiązania,

$3X + 5Y = 11$, $\mathrm{NWD}(3,5) = 1$ i $1 \mid 11$, czyli równanie ma rozwiązanie.

Przykład

$2X + 6Y = 3$, $\mathrm{NWD}(2,6) = 2$ i $2 \nmid 3$ zatem równanie nie ma rozwiązania,

$3X + 5Y = 11$, $\mathrm{NWD}(3,5) = 1$ i $1|11$, czyli równanie ma rozwiązanie.
Wiemy, że istnieją liczby całkowite X, Y, że $\mathrm{NWD}(3,5) = 3X + 5Y = 1$.
Korzystając z algorytmu Euklidesa mamy:

Przykład

$2X + 6Y = 3$, $\mathrm{NWD}(2,6) = 2$ i $2 \nmid 3$ zatem równanie nie ma rozwiązania,

$3X + 5Y = 11$, $\mathrm{NWD}(3,5) = 1$ i $1|11$, czyli równanie ma rozwiązanie.
Wiemy, że istnieją liczby całkowite X, Y, że $\mathrm{NWD}(3,5) = 3X + 5Y = 1$.
Korzystając z algorytmu Euklidesa mamy:

$$5 = 3 \cdot 1 + 2$$
$$3 = 2 \cdot 1 + \underbrace{1}$$
$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

Przykład

$2X + 6Y = 3$, $\mathrm{NWD}(2,6) = 2$ i $2 \nmid 3$ zatem równanie nie ma rozwiązania,

$3X + 5Y = 11$, $\mathrm{NWD}(3,5) = 1$ i $1|11$, czyli równanie ma rozwiązanie.
Wiemy, że istnieją liczby całkowite X, Y, że $\mathrm{NWD}(3,5) = 3X + 5Y = 1$.
Korzystając z algorytmu Euklidesa mamy:

$$\begin{aligned} 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + \underbrace{1} \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \big| \cdot 11 \\ 11 &= 3 \cdot 22 + 5 \cdot (-11) \end{aligned}$$

Przykład

$2X + 6Y = 3$, $\mathrm{NWD}(2,6) = 2$ i $2 \nmid 3$ zatem równanie nie ma rozwiązania,

$3X + 5Y = 11$, $\mathrm{NWD}(3,5) = 1$ i $1|11$, czyli równanie ma rozwiązanie.
Wiemy, że istnieją liczby całkowite X, Y, że $\mathrm{NWD}(3,5) = 3X + 5Y = 1$.
Korzystając z algorytmu Euklidesa mamy:

$$\begin{aligned} 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + \underbrace{1} \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \big| \cdot 11 \\ 11 &= 3 \cdot 22 + 5 \cdot (-11) \end{aligned}$$

Zatem $X_0 = 22$ i $Y_0 = -11$.

Przykład

$2X + 6Y = 3$, $\mathrm{NWD}(2,6) = 2$ i $2 \nmid 3$ zatem równanie nie ma rozwiązania,

$3X + 5Y = 11$, $\mathrm{NWD}(3,5) = 1$ i $1|11$, czyli równanie ma rozwiązanie.
Wiemy, że istnieją liczby całkowite X, Y, że $\mathrm{NWD}(3,5) = 3X + 5Y = 1$.
Korzystając z algorytmu Euklidesa mamy:

$$\begin{aligned} 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + \underbrace{1} \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (5 - 3 \cdot 1) = 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \big| \cdot 11 \\ 11 &= 3 \cdot 22 + 5 \cdot (-11) \end{aligned}$$

Zatem $X_0 = 22$ i $Y_0 = -11$. Ostatecznie:

$$\begin{cases} X = 22 + 5t, & t \in \mathbb{Z} \\ Y = -11 - 3t, & t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Przykład

Wiemy już, że

$$\mathrm{NWD}(234, 164) = 2 = (-7) \cdot 234 + 10 \cdot 164.$$

Przykład

Wiemy już, że

$$\mathrm{NWD}(234, 164) = 2 = (-7) \cdot 234 + 10 \cdot 164.$$

Zauważmy, że poszukiwanie liczb X i Y sprowadza się do rozwiązania równania diofantycznego

Przykład

Wiemy już, że

$$\mathrm{NWD}(234, 164) = 2 = (-7) \cdot 234 + 10 \cdot 164.$$

Zauważmy, że poszukiwanie liczb X i Y sprowadza się do rozwiązania równania diofantycznego

$$234X + 164Y = 2.$$

Przykład

Wiemy już, że

$$\mathrm{NWD}(234, 164) = 2 = (-7) \cdot 234 + 10 \cdot 164.$$

Zauważmy, że poszukiwanie liczb X i Y sprowadza się do rozwiązania równania diofantycznego

$$234X + 164Y = 2.$$

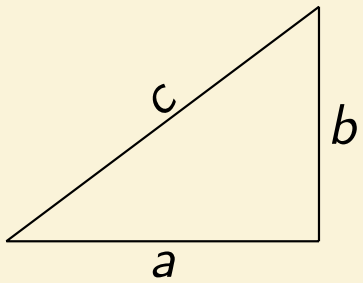
Zatem rozwiązaniem tego równania jest

$$\begin{cases} X &= -7 + \frac{164}{2} \cdot t = -7 + 82 \cdot t \\ Y &= 10 - \frac{234}{2} \cdot t = 10 - 117 \cdot t \end{cases}$$

Równanie Pitagorasa

Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że boki trójkąta prostokątnego spełniają zależność

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Takie trójki liczb nazywamy *trójkami pitagorejskimi*; jeśli liczby a, b, c nie mają wspólnego dzielnika, to mówimy wtedy o trójce *pierwotnej*.
(3,4,5) to na pewno najbardziej znana trójka.

Przykładowe trójki pitagorejskie

Rozwiązując równanie:

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

dowiemy się jakie inne trójkąty, których boki są liczbami naturalnymi, możemy skonstruować. Każde rozwiązanie (X_0, Y_0, Z_0) równania możemy zapisać w postaci:

Przykładowe trójki pitagorejskie

Rozwiązując równanie:

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

dowiemy się jakie inne trójkąty, których boki są liczbami naturalnymi, możemy skonstruować. Każde rozwiązanie (X_0, Y_0, Z_0) równania możemy zapisać w postaci:

$$X_0 = m^2 - n^2$$
$$Y_0 = 2mn$$
$$Z_0 = m^2 + n^2,$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ są liczbami względnie pierwszymi (tzn.: NWD$(m, n) = 1$) oraz jedna z nich jest liczbą parzystą.

Przykładowe trójki pitagorejskie

Rozwiązując równanie:

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

dowiemy się jakie inne trójkąty, których boki są liczbami naturalnymi, możemy skonstruować. Każde rozwiązanie (X_0, Y_0, Z_0) równania możemy zapisać w postaci:

$$X_0 = m^2 - n^2$$
$$Y_0 = 2mn$$
$$Z_0 = m^2 + n^2,$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ są liczbami względnie pierwszymi (tzn.: NWD$(m, n) = 1$) oraz jedna z nich jest liczbą parzystą.

m	2	3	4	5	5
n	1	2	1	2	3
X	3	5	15	21	9
Y	4	12	8	20	40
Z	5	13	17	29	41

Równanie Fermata

Najbardziej znanym równaniem diofantycznym jest *równanie Fermata*:

Równanie Fermata

Najbardziej znanym równaniem diofantycznym jest *równanie Fermata*:

$$X^n + Y^n = Z^n.$$

Równanie Fermata

Najbardziej znanym równaniem diofantycznym jest *równanie Fermata*:

$$X^n + Y^n = Z^n.$$

Fermat w swoim egzamplarzu *Arytmetyki Diofantosa* na marginesie strony z rozwiązaniem równania Pitagorasa napisał:

„Nie można podzielić sześcianu na dwa sześciany ani czwartej potęgi na dwie czwarte potęgi, ani ogólnie żadnej potęgi wyższej niż druga na dwie takie same potęgi; znalazłem zaprawdę zadziwiający dowód tego, lecz ten margines jest zbyt wąski, by go zmieścić."

Wielkie twierdzenie Fermata

Twierdzenie (Wielkie twierdzenie Fermata)

Dla $n \geqslant 3$ równanie

$$X^n + Y^n = Z^n$$

nie ma rozwiązania w liczbach naturalnych.

Wielkie twierdzenie Fermata

Twierdzenie (Wielkie twierdzenie Fermata)

Dla $n \geqslant 3$ równanie

$$X^n + Y^n = Z^n$$

nie ma rozwiązania w liczbach naturalnych.

Historia zmagań ze znalezieniem dowodu WTF jest długa i obfitowała w wiele pomyłek znanych matematyków. Dopiero po blisko 350 latach udało się udowodnić twierdzenie. W roku 1993 amerykański matematyk Andrew Wiles na wykładzie w Instytucie Newtona Uniwersytetu w Cambridge ogłosił, że udowodnił WTF. Jednak dopiero po dwóch latach, w roku 1995, po usunięciu luk w dowodzie, ukazały się dwie prace naukowe Wilesa, zawierające pełny dowód.

Zastosowania

Zadanie

Ile biletów po 3zł i 5zł można kupić za 149zł, jeśli należy wydać wszystkie możliwe pieniądze?

Zastosowania

Zadanie

Ile biletów po 3zł i 5zł można kupić za 149zł, jeśli należy wydać wszystkie możliwe pieniądze?

Rozwiązanie

Niech X będzie liczbą biletów po 3zł, a Y liczbą biletów po 5zł. Wówczas treść naszego zadania możemy opisać równaniem:

Zastosowania

Zadanie

Ile biletów po 3zł i 5zł można kupić za 149zł, jeśli należy wydać wszystkie możliwe pieniądze?

Rozwiązanie

Niech X będzie liczbą biletów po 3zł, a Y liczbą biletów po 5zł. Wówczas treść naszego zadania możemy opisać równaniem:

$$3X + 5Y = 149$$

Zastosowania

Zadanie

Ile biletów po 3zł i 5zł można kupić za 149zł, jeśli należy wydać wszystkie możliwe pieniądze?

Rozwiązanie

Niech X będzie liczbą biletów po 3zł, a Y liczbą biletów po 5zł. Wówczas treść naszego zadania możemy opisać równaniem:

$$3X + 5Y = 149$$

Zauważmy, że $\mathrm{NWD}(5, 3) = 1$ oraz $1 \mid 149$, zatem równanie to ma rozwiązanie. Przejdźmy do wyznaczenia X i Y.

Rozwiązanie (cd)

Korzystając z algorytmu Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + \underbrace{1} \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ 1 &= 3 - (5 - 3 \cdot 1) \\ 1 &= (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Rozwiązanie (cd)

Korzystając z algorytmu Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + \underbrace{1} \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ 1 &= 3 - (5 - 3 \cdot 1) \\ 1 &= (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Przemnóżmy ostatnią równość przez 149, wówczas:

$$149 = (-149) \cdot 5 + 298 \cdot 3$$

Rozwiązanie (cd)

Korzystając z algorytmu Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + \underbrace{1} \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ 1 &= 3 - (5 - 3 \cdot 1) \\ 1 &= (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Przemnóżmy ostatnią równość przez 149, wówczas:

$$149 = (-149) \cdot 5 + 298 \cdot 3$$

Zatem rozwiązaniem wyjściowego równania jest para $X_0 = -149$ i $Y_0 = 298$.

Rozwiązanie (cd)

Korzystając z algorytmu Euklidesa dostajemy:

$$\begin{aligned} 5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + \underbrace{1} \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ 1 &= 3 - (5 - 3 \cdot 1) \\ 1 &= (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Przemnóżmy ostatnią równość przez 149, wówczas:

$$149 = (-149) \cdot 5 + 298 \cdot 3$$

Zatem rozwiązaniem wyjściowego równania jest para $X_0 = -149$ i $Y_0 = 298$. Wszystkie rozwiązania są więc postaci:

$$\begin{cases} X &= 298 + 5 \cdot t \\ Y &= -149 - 3 \cdot t \end{cases}$$

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$.
Mamy:

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$.
Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$. Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$.
Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

t										
X										
Y										

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$.
Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

t	-59									
X	3									
Y	28									

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$.
Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

t	-59	-58									
X	3	8									
Y	28	25									

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$.
Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

t	-59	-58	-57							
X	3	8	13							
Y	28	25	22							

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$.
Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

t	-59	-58	-57	-56						
X	3	8	13	18						
Y	28	25	22	19						

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$. Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

t	-59	-58	-57	-56	-55					
X	3	8	13	18	23					
Y	28	25	22	19	16					

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$. Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

t	-59	-58	-57	-56	-55	-54				
X	3	8	13	18	23	28				
Y	28	25	22	19	16	13				

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$. Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

t	-59	-58	-57	-56	-55	-54	-53			
X	3	8	13	18	23	28	33			
Y	28	25	22	19	16	13	10			

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$. Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

t	-59	-58	-57	-56	-55	-54	-53	-52		
X	3	8	13	18	23	28	33	38		
Y	28	25	22	19	16	13	10	7		

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$.
Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

t	-59	-58	-57	-56	-55	-54	-53	-52	-51	
X	3	8	13	18	23	28	33	38	43	
Y	28	25	22	19	16	13	10	7	4	

Rozwiązanie (cd)

Musimy odrzucić rozwiązania ujemne, czyli dobrać takie t, aby $X > 0$ i $Y > 0$.
Mamy:

$$-59 \leqslant t \leqslant -50.$$

Zatem bilety można kupić na 10 różnych sposobów:

t	-59	-58	-57	-56	-55	-54	-53	-52	-51	-50
X	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48
Y	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1

Zadanie

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} XY &= 720 \\ \text{NWD}(X, Y) &= 4 \end{cases}$$

Zadanie

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} XY &= 720 \\ \text{NWD}(X,Y) &= 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że skoro $\text{NWD}(X,Y) = 4$, to $X = 4k$ i $Y = 4l$, gdzie $\text{NWD}(k,l) = 1$.
Podstawiając do pierwszego równania dostejmy:

Zadanie

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} XY & = 720 \\ \text{NWD}(X, Y) & = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że skoro $\text{NWD}(X, Y) = 4$, to $X = 4k$ i $Y = 4l$, gdzie $\text{NWD}(k, l) = 1$. Podstawiając do pierwszego równania dostejmy:

$$4k \cdot 4l = 720$$

Zadanie

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} XY &= 720 \\ \text{NWD}(X,Y) &= 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że skoro $\text{NWD}(X,Y) = 4$, to $X = 4k$ i $Y = 4l$, gdzie $\text{NWD}(k,l) = 1$. Podstawiając do pierwszego równania dostejmy:

$$4k \cdot 4l = 720$$
$$16 \cdot k \cdot l = 720$$

Zadanie

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} XY &= 720 \\ \text{NWD}(X,Y) &= 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że skoro $\text{NWD}(X,Y) = 4$, to $X = 4k$ i $Y = 4l$, gdzie $\text{NWD}(k,l) = 1$. Podstawiając do pierwszego równania dostejmy:

$$4k \cdot 4l = 720$$
$$16 \cdot k \cdot l = 720$$
$$k \cdot l = 45$$

Rozwiązanie (cd)

Ponieważ liczby k i l są względnie pierwsze, to

k	l
1	45

Rozwiązanie (cd)

Ponieważ liczby k i l są względnie pierwsze, to

k	l
1	45
3	15

Rozwiązanie (cd)

Ponieważ liczby k i l są względnie pierwsze, to

k	l
1	45
3	15
5	9

Rozwiązanie (cd)

Ponieważ liczby k i l są względnie pierwsze, to

k	l
1	45
3	15
5	9
9	5

a zatem

X	Y
4	180

Rozwiązanie (cd)

Ponieważ liczby k i l są względnie pierwsze, to

k	l
1	45
3	15
5	9
9	5

a zatem

X	Y
4	180
20	36

Rozwiązanie (cd)

Ponieważ liczby k i l są względnie pierwsze, to

k	l
1	45
3	15
5	9
9	5

a zatem

X	Y
4	180
20	36
36	20

Rozwiązanie (cd)

Ponieważ liczby k i l są względnie pierwsze, to

k	l
1	45
3	15
5	9
9	5

a zatem

X	Y
4	180
20	36
36	20
180	4

Odpowiedź: Szukane pary liczb to $(4, 180)$, $(20, 36)$, $(36, 20)$, $(180, 4)$.

Rozwiązanie

Treść zagadki możem zapisać:

$\frac{1}{6}$ życia zajęła mu młodosć
potem po $\frac{1}{12}$ życia wyrosła mu broda
następnie po $\frac{1}{7}$ życia ożenił się,
po 5 latach urodził mu się syn,
syn żył połowę krócej od ojca,
ojciec zmarł 4 lata po synu.

Rozwiązanie

Treść zagadki możemy zapisać:

$\frac{1}{6}$ życia zajęła mu młodość
potem po $\frac{1}{12}$ życia wyrosła mu broda
następnie po $\frac{1}{7}$ życia ożenił się,
po 5 latach urodził mu się syn,
syn żył połowę krócej od ojca,
ojciec zmarł 4 lata po synu.

Oznaczmy wiek Diofantosa przez X. Wystarczy zatem rozwiązań równanie:

Rozwiązanie

Treść zagadki możemy zapisać:

$\frac{1}{6}$ życia zajęła mu młodość
potem po $\frac{1}{12}$ życia wyrosła mu broda
następnie po $\frac{1}{7}$ życia ożenił się,
po 5 latach urodził mu się syn,
syn żył połowę krócej od ojca,
ojciec zmarł 4 lata po synu.

Oznaczmy wiek Diofantosa przez X. Wystarczy zatem rozwiązań równanie:

$$\frac{1}{6}X + \frac{1}{12}X + \frac{1}{7}X + 5 + \frac{1}{2}X + 4 = X$$

Rozwiązanie

Treść zagadki możemy zapisać:

$\frac{1}{6}$ życia zajęła mu młodość
potem po $\frac{1}{12}$ życia wyrosła mu broda
następnie po $\frac{1}{7}$ życia ożenił się,
po 5 latach urodził mu się syn,
syn żył połowę krócej od ojca,
ojciec zmarł 4 lata po synu.

Oznaczmy wiek Diofantosa przez X. Wystarczy zatem rozwiązań równanie:

$$\frac{1}{6}X + \frac{1}{12}X + \frac{1}{7}X + 5 + \frac{1}{2}X + 4 = X$$

Po przekształceniach dostejemy $X = 84$. Zatem Diofantos żył 84 lata.

Literatura

- N.Koblitz, *Wykład z teorii liczb i kryptografii*, WNT, Warszawa, 1995
- W.Narkiewicz, *Teoria liczb*, Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 2003;
- W.Sierpiński, *250 zadań z elementarnej teorii liczb*, Biblioteczka Matematyczna 17, PZWS, Warszawa 1987
- W.Sierpiński, *Wstęp do teorii liczb*, Biblioteczka Matematyczna 25, PZWS, Warszawa 1965.