Kółeczko z funkcji

1. Dana jest funkcja $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ taka, że $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n$ dla $n = 1, 2, ...$ Wykazać, że nie istnieją takie funkcje rosnące $g : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, $h : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, że $f = g - h$.

2. Dana jest taka funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwe są równości:

$$f(x) = f(2x) = f(1 - x).$$

Udowodnić, że funkcja f jest okresowa.

3. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takie, że dla dowolnych liczb wymiernych x, y prawdziwa jest równość:

$$f(x^2 + y) = xf(x) + f(y).$$

4. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych x, y prawdziwa jest równość:

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x.$$

5. Funkcja $f(x, y, z)$ trzech zmiennych rzeczywistych spełnia dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e równość:

$$f(a, b, c) + f(b, c, d) + f(c, d, e) + f(d, e, a) + f(e, a, b) = a + b + c + d + e.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geqslant 5)$ prawdziwa jest równość:

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_4) + ... + f(x_n, x_1, x_2) = x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

6. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje monotoniczne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość:

$$f(f(x) - y) + f(x + y) = 0.$$

7. Wyznaczyć wszystkie takie pary funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość:

$$f(x)f(y) = g(x)g(y) + g(x) + g(y).$$

8. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość:

$$f(x + f(x + y)) = f(x - y) + f(x)^2.$$

9. Wyznaczyć wszystkie takie pary funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość:

$$g(f(x) - y) = f(g(y)) + x.$$

10. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość:

$$yf(2x) - xf(2y) = 8xy(x^2 - y^2).$$

11. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość:

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

12. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ takie, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość:

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2y^2.$$

13. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z różnych od zera i $x + y + z \neq 0$ prawidziwa jest równość:

$$f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{oraz:} \quad f(x) + f(y) + f(z) = 1 + f(x + y + z).$$

14. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość:

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x^2)f(y).$$

15. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość:

$$f(2x + y) + f(2y + x) = 5x^2 + 8xy + 5f(y).$$

Bonus. Udowodnić, że jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ oraz $ab + bc + ca \leqslant 3abc$, to prawdziwa jest nierówność:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a + b}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b + c}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{c + a}} + 3 \leqslant \sqrt{2}\left(\sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a}\right).$$