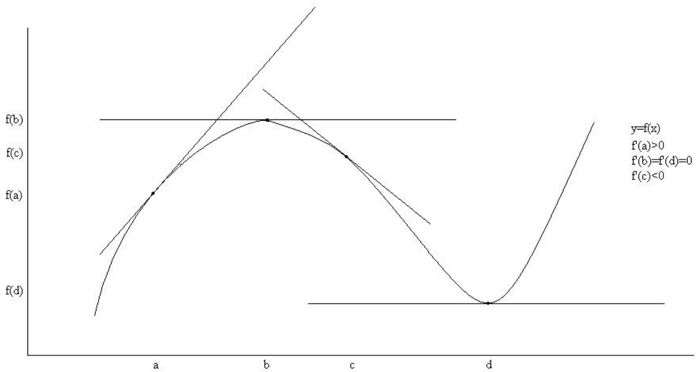
[Twierdzenia o wartości średniej]

Mateusz Jurczyński, 8 stycznia 2010 r.

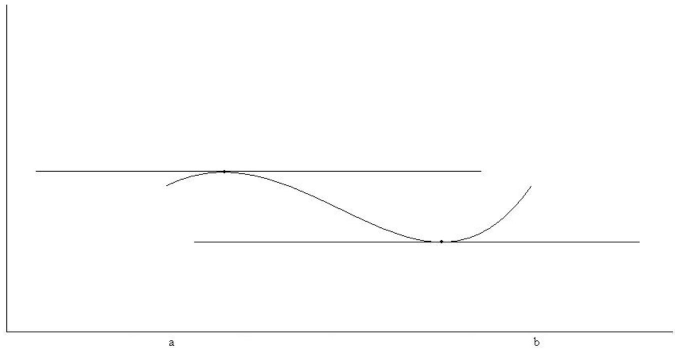
W referacie korzystamy z pojęcia pochodnej funkcji. W telegraficznym skrócie, wartość pochodnej funkcji f w punkcie x_0 wyznacza nam współczynnik kierunkowy prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$. Intuicyjnie, wysoka wartość pochodnej w danym punkcie mówi nam, że funkcja w otoczeniu tego punktu 'szybko rośnie'. Analogicznie, mała wartość (tj. liczba ujemna) mówi nam, że funkcja w otoczeniu punktu 'szybko maleje'. Jeżeli funkcja przyjmuje w punkcie x_0 swoje maksimum lub minimum (w skrócie - ekstremum) lokalne - co na wykresie jest widoczne przez charakterystyczne 'pagórki' i 'dołki' - to $f'(x_0) = 0$.



Twierdzenie 0.1 (Rolle'a). *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w $[a, b]$ i różniczkowalną w (a, b). Wówczas jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że $f'(\xi) = 0$.*

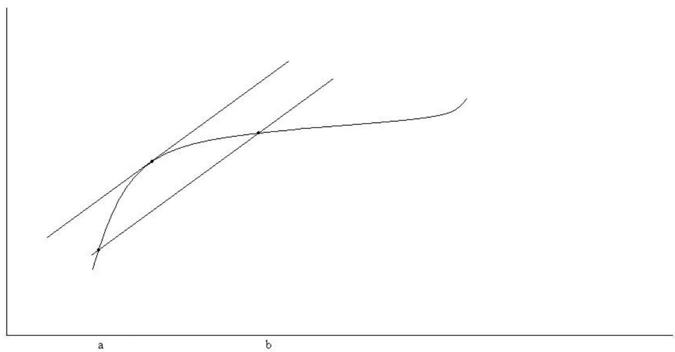
Interpretacja geometryczna twierdzenia Rolle'a mówi tyle, że jeśli funkcja przyjmuje te same wartości na dwóch krańcach przedziału, to gdzieś pomiędzy nimi musi znajdować się wzmiankowany powyżej 'pagórek' lub 'dołek'.

Twierdzenie 0.2 (Cauchy'ego). *Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi w $[a, b]$ i różniczkowalnymi w (a, b). Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że $f'(\xi)[g(b) - g(a)] = g'(\xi)[f(b) - f(a)]$.*



Twierdzenie 0.3 (Lagrange'a)**.** *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w $[a, b]$ i różniczkowalną w (a, b). Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Interpretacja geometryczna twierdzenia Lagrange'a mówi tyle, że dla każdej siecznej wykresu funkcji f istnieje styczna do wykresu funkcji f, równoległa do tej siecznej.



0.1 Przykłady

1. Dane są dwie funkcje $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągłe na $[a, b]$ i różniczkowalne na (a, b) takie, że $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. Wykaż, że istnieje taki

punkt $c \in (a,b)$, że $f'(c) = g'(c)$. Twierdzenie to nosi nazwę *twierdzenia o koniach wyścigowych* i jego intuicyjna interpretacja mówi tyle, że jeśli dwa konie jednocześnie rozpoczynają wyścig i jednocześnie przebiegają linię mety, to musiała być taka chwila, kiedy oba konie biegły z tą samą prędkością.
Wskazówka rozwiązania: Zastosować twierdzenie Rolle'a do funkcji $h = f - g$

2. Dany jest wielomian $n+1$-tego stopnia $W(x)$, mający $n+1$ różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że jego n-ta pochodna ma pierwiastek rzeczywisty. *Wskazówka rozwiązania: Zastosować n razy twierdzenie Rolle'a do wielomianu na przedziałach pomiędzy kolejnymi pierwiastkami i powtórzyć procedurę n razy.*

3. Udowodnić nierówności:

   - $$(x-y)n(x^{n-1}) \leq x^n - y^n \leq (x-y)n(y^{n-1}),\ 0 \leq x \leq y, n > 1$$
   - $$\frac{a-b}{a} \leq ln\frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b},\ a > b > 0$$
   - $$\frac{x}{x+1} \leq ln(1+x) \leq x,\ x \in (-1,\infty)$$
   - $$\frac{x-y}{\sqrt{x}} \leq 2(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \leq \frac{x-y}{\sqrt{y}},\ x > y > 0$$
   - $$e^x > ex,\ x > 1$$
   - $$e^x > 1 + x,\ x \in \mathbb{R}$$
   - $$|\cos^n x - \cos^n y| \leq n|x-y|,\ x, y \in \mathbb{R}, n > 0$$

   Udowodnimy nierówność pierwszą, reszta idzie z grubsza podobnie. Ponieważ $0 \leq x \leq y$(możemy przyjąć $x < y$, dla $x = y$ wszędzie są zera i równość jest oczywista), możemy podzielić przez odpowiednią różnicę i zastosować twierdzenie Lagrange'a do funkcji

   $$f(x) = x^n,\ f'(x) = nx^{n-1}$$

Otrzymujemy

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = nc^{n-1},\ c \in (x, y),$$

skąd po odpowiednim oszacowaniu c uzyskujemy żądane nierówności.

0.2 Zadanie dla ambitnych

Niech $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C_1(tj. ma pierwszą pochodną i ta pochodna jest funkcją ciągłą) taką, że $f(0) = f(1) = 0$ oraz $f(a) = \sqrt{3}$ dla pewnego $a \in (0, 1)$. Udowodnij, że istnieją dwie proste styczne do wykresu funkcji f, tworzące trójkąt równoboczny z odpowiednim odcinkiem osi OX.

Rozwiązanie: Z twierdzenia Lagrange'a

$$\exists_{c\in(0,a)} f'(c) = \frac{f(a) - f(0)}{a} = \frac{\sqrt{3}}{a} > \sqrt{3}$$

$$\exists_{d\in(a,1)} f'(d) = \frac{f(1) - f(a)}{1 - a} = \frac{-\sqrt{3}}{1 - a} < -\sqrt{3}$$

Skoro f' przyjmuje wartości większe od $\sqrt{3}$ i mniejsze od $-\sqrt{3}$, a jest funkcją ciągłą, to w szczególności musi też przyjąć wszystkie wartości pomiędzy nimi, czyli w szczególności $f'(e) = \sqrt{3}$ oraz $f'(g) = -\sqrt{3}$ dla pewnych $e, g \in (0, 1)$. Zatem istnieją dwie styczne do wykresu funkcji f, przecinające oś OX pod kątem odpowiednio $\frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{2\pi}{3}$, zatem tworzą one wraz z osią OX trójkąt równoboczny.