Wokół twierdzenia Pascala

Marcin Fryz

08 czerwca 2012

1 Wstęp

Geometria, a w szczególności planimetria, jest jednym z najważniejszych działów matematyki. Jej zastosowania można dojrzeć wszędzie: zaczynając od architektury, poprzez sztukę, na astronomii kończąc. Jest to dziedzina o tyle ważna, że uprawianie jej niesamowicie rozwija wyobraźnię, a zdobyte w efekcie tego doświadczenie poprawia spostrzegawczość. Nie tylko tę, dzięki której zauważamy różne własności geometryczne, ale także przydatną nam w życiu codziennym. Idąc dalej, jest ona wymagana na lekcjach matematyki, a także niezbędna na wszelkich konkursach matematycznych i olimpiadach. Poniższy skrypt jest pisany ze szczególnym ukierunkowaniem na to ostatnie, czyli Olimpiadę Matematyczną. Skupimy się przede wszystkim na takich pojęciach jak współpękowość i współliniowość. Udowodnimy kilka wartych zapamiętania twierdzeń, a na koniec przejdziemy do zadań.

2 Teoria

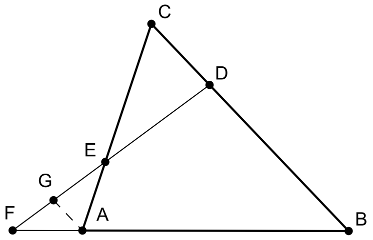
2.1 Twierdzenie Menelaosa

Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E, F, różne od wierzchołków trójkąta ABC, leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB, przy czym spełniony jest jeden z dwóch warunków:

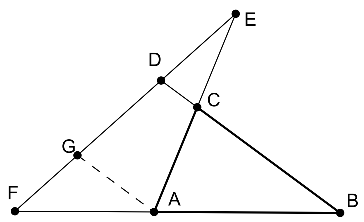
a. dokładnie dwa spośród punktów D, E, F leżą na obwodzie trójkąta ABC (rys.1)
b. żaden z punktów D, E, F nie leży na obwodzie trójkąta ABC (rys.2).

Wówczas punkty D, E, F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \qquad (1)$$



rys.1



rys.2

2.1.1 Dowód:

Dla dowodu implikacji w prawą stronę załóżmy, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej. Niech G będzie punktem przecięcia prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do prostej BC z prostą zawierającą punkty D, E, F. Wtedy z twierdzenia Talesa możemy zanotować związki:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{GA}{BD}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{CD}{GA}$$

Mnożąc te dwie równości stronami, otrzymamy związek (1), co kończy dowód.

Dowodząc implikacji w lewą stronę, załóżmy, że zachodzi równość (1) oraz przyjmijmy, że punkt F leży na przedłużeniu boku AB. Załóżmy nie wprost, że prosta DE przecina przedłużenie boku AB w pewnym punkcie H różnym od F. Pisząc twierdzenie Menelaosa dla punktów D, E, H leżących na jednej prostej, mamy:

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Co po przyrównaniu do (1) daje wniosek, że $\frac{AH}{HB} = \frac{AF}{FB}$, czyli sprzeczność z założeniem $F \neq H$. Dowód twierdzenia został więc zakończony.

Ćwiczenie 1. Dany jest trójkąt ABC. Na tym fragmencie półprostej AB, który nie zawiera boku AB, obrano taki punkt F, a na bokach BC i CA odpowiednio takie punkty D i E, że zachodzą równości:

$$AB = 9, \ BD = 3, \ DC = 3, \ CE = 2, \ EA = 5.$$

Obliczyć długość BF, jeśli wiadomo, że punkty E, D i F są współliniowe.

2.2 Twierdzenie Cevy

Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E, F, różne od wierzchołków trójkąta ABC, leżą odpowiednio na prostych BC, CA, AB, przy czym spełniony jest jeden z dwóch warunków:

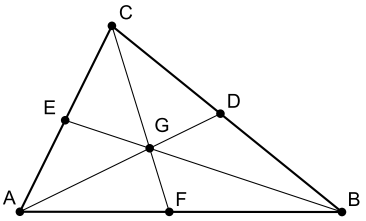
a. wszystkie trzy punkty D, E, F leżą na obwodzie trójkąta ABC (rys.3)
b. dokładnie jeden spośród punktów D, E, F leży na obwodzie trójkąta ABC (rys.4)

Wówczas proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi związek:

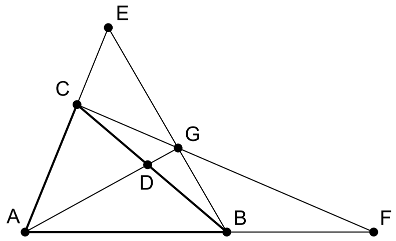
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \tag{2}$$

2.2.1 Dowód pierwszy

Przyjmijmy, że mamy dany trójkąt ABC, a proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie, który oznaczymy jako G. Wówczas punkty A, G, D są współliniowe, więc z twierdzenia Menelaosa możemy zapisać związek:



rys.3



rys.4

$$\frac{FB}{BA} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CG}{GF} = 1 \tag{3}$$

Podobnie, punkty B, G, E leżą na jednej prostej, wobec czego zachodzi następująca równość:

$$\frac{FA}{AB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CG}{GF} = 1 \tag{4}$$

Dzieląc równanie (3) przez (4), otrzymujemy związek (2), co kończy dowód w prawą stronę.

Załóżmy teraz, że w trójkącie ABC proste AD, BE, CF nie przecinają się w jednym punkcie, a mimo to zachodzi równość (2). Poprowadźmy więc prostą przechodzącą przez C i punkt przecięcia prostych AD i BE. Niech tnie ona AB w punkcie H. Wówczas z twierdzenia Cevy możemy zapisać związek:

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \tag{5}$$

Przyrównując równania (2) oraz (5), otrzymujemy proporcję $\frac{AF}{FB} = \frac{AH}{HB}$, co prowadzi do sprzeczności, bo $F \neq H$. Dowód pierwszy został więc zakończony.

2.2.2 Dowód drugi

Drugi dowód, wymagający znacznie mniejszej wiedzy, wykorzystuje rachunek na polach oraz pewną ciekawą zależność. Dla uproszczenia zanotujmy, że pole trójkąta XYZ oznaczać będziemy jako $[XYZ]$. Przyjmijmy, że mamy dany trójkąt ABC oraz proste AD, BE, CF przecinają się w punkcie G. Wobec tego trójkąty AFC oraz CFB mają wspólną wysokość opuszczoną na prostą AB, dlatego stosunek pól tych trójkątów jest równy stosunkowi ich podstaw; mamy więc:

$$\frac{[AFC]}{[CFB]} = \frac{AF}{FB}, \text{ i podobnie: } \frac{[BDA]}{[ADC]} = \frac{BD}{DC}, \quad \frac{[CEB]}{[BEA]} = \frac{CE}{EA}.$$

Rozumując absolutnie analogicznie, stwierdzamy, że:

$$\frac{[AFG]}{[GFB]} = \frac{AF}{FB}, \text{ i podobnie: } \frac{[BDG]}{[GDC]} = \frac{BD}{DC}, \quad \frac{[CEG]}{[GEA]} = \frac{CE}{EA}.$$

Wobec czego mamy równości:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{[AFC]}{[CFB]} = \frac{[AFG]}{[GFB]}, \quad \frac{BD}{DC} = \frac{[BDA]}{[ADC]} = \frac{[BDG]}{[GDC]}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{[CEB]}{[BEA]} = \frac{[CEG]}{[GEA]} \tag{6}$$

Zapiszmy teraz lemat:
Jeśli dodatnie liczby rzeczywiste spełniają zależność:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \text{to spełniają również:} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Dowód tego prostego faktu pozostawiam jako ćwiczenie.
Zauważmy, że równości (6) spełniają założenia lematu, skąd płyną następujące trzy wnioski:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{[AFC]}{[CFB]} = \frac{[AFG]}{[GFB]} = \frac{[AFC]-[AFG]}{[CFB]-[CFG]} = \frac{[AGC]}{[CGB]} \tag{7}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{[BDA]}{[ADC]} = \frac{[BDG]}{[GDC]} = \frac{[BDA]-[BDG]}{[ADC]-[GDC]} = \frac{[BGA]}{[AGC]} \tag{8}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{[CEB]}{[BEA]} = \frac{[CEG]}{[GEA]} = \frac{[CEB]-[CEG]}{[BEA]-[GEA]} = \frac{[CGB]}{[BGA]} \tag{9}$$

Mnożąc stronami wnioski (7), (8), (9), otrzymujemy:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{[AGC]}{[CGB]} \cdot \frac{[BGA]}{[AGC]} \cdot \frac{[CGB]}{[BGA]} = 1$$

a to kończy dowód w prawą stronę. Dowód w lewą stronę jest identyczny jak w przypadku 2.2.1.

2.3 Trygonometryczna wersja twierdzenia Cevy

Przy takich samych założeniach jak w 2.2 proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi:

$$\frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA} \cdot \frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC} \cdot \frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle BAD} = 1 \tag{10}$$

2.3.1 Dowód

Z twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{\sin\angle FCA}{\sin\angle AFC} \quad \text{i} \quad \frac{FB}{BC} = \frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle CFB}$$

Ale wobec tożsamości $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ mamy $\sin\angle AFC = \sin\angle CFB$. Zapiszmy więc równości:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\sin\angle FCA}{\sin\angle BCF} \cdot \frac{CA}{BC} \quad \text{i podobnie:} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC} \cdot \frac{AB}{CA}, \quad \frac{CD}{DA} = \frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle BAD} \cdot \frac{BC}{AB}$$

Mnożąc stronami te zależności i korzystając z twierdzenia Cevy, dostajemy (10), czyli tezę.

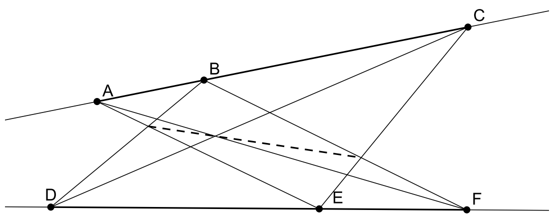
Ćwiczenie 2. Dany jest trójkąt ABC. Udowodnić, że:
a) środkowe,
b) dwusieczne,
c) wysokości*,
d) symediany** *(wskazówka: poszukać informacji o symedianie i twierdzeniu o niej).*
przecinają się w jednym punkcie.

2.4 Parę słów o geometrii rzutowej

2.4.1 Płaszczyzna rzutowa

Składa się z punktów oraz prostych, które będziemy odpowiednio oznaczali małymi i wielkimi literami alfabetu. Podstawową rolę pełni relacja incydencji. Mówimy, że a incyduje z A (co oznaczamy $a|A \Leftrightarrow A|a$), kiedy a leży na A. Fundamentem w tej geometrii jest sześć aksjomatów:

1. $a, b|A, B \Rightarrow a = b \vee A = B$
2. $\forall_{a,b} \exists_C \; a, b|C$
3. $\forall_{A,B} \exists_c \; c|A, B$
4. Istnieje czworokąt: zbiór czterech punktów, spośród których żadne trzy nie są współliniowe. Uwaga: w geometrii rzutowej nie rozróżniamy „boków” i „przekątnych” czworokąta. Każdy czworokąt ma sześć boków.
5. (Aksjomat Fano) Punkty przecięcia przeciwległych boków czworokąta nie są współliniowe.
6. (Twierdzenie Pappusa) Jeżeli wierzchołki sześciokąta leżą na przemian na dwóch prostych, to punkty przecięcia par przeciwległych boków tego sześciokąta są współliniowe.



2.4.2 Przekształcenie rzutowe

Jest to funkcja wzajemnie jednoznaczna przeprowadzająca przestrzeń rzutową na siebie i zachowująca współliniowość punktów. Spełnia ono ponadto warunki:

- proste pozostają prostymi, więc punkty współliniowe pozostają współliniowe (definicja przekształcenia rzutowego),
- krzywe stożkowe pozostają stożkowymi, jednak mogą stać się stożkowymi innego rodzaju, np. okrąg może zostać przekształcony w hiperbolę,
- proste współpękowe pozostają współpękowe,
- zachowywany jest dwustosunek.

2.4.3 Zasada dualności

Okazuje się, że każde twierdzenie w geometrii rzutowej ma swoje twierdzenie dualne, które jest mu równoważne. Wystarczy zamienić słowo „prosta” na „punkt” lub na odwrót. Oczywiście zamieniamy wtedy także takie zdania jak „leży na prostej” na „przechodzi przez punkt”, „punkty są współliniowe” na „proste są współpękowe” itp. Żeby udowodnić ten fakt, wystarczy pokazać, że wszystkie aksjomaty geometrii rzutowej są dualne.

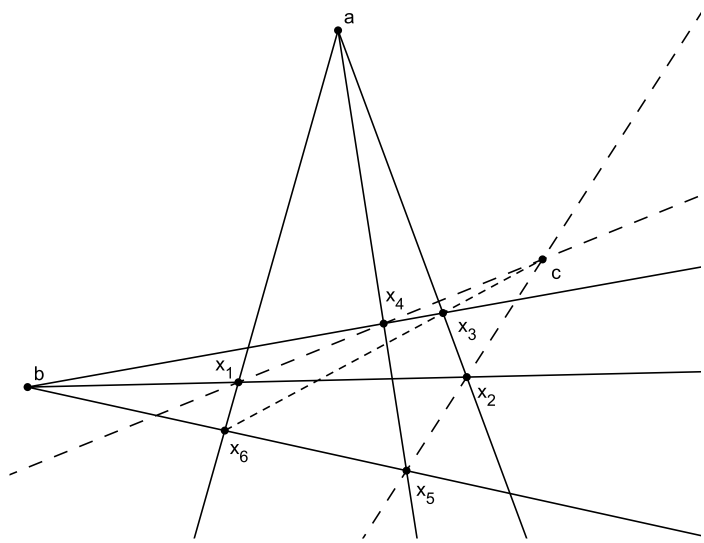
Przyjrzyjmy się więc aksjomatom. Aksjomat pierwszy jest sam ze sobą dualny. Aksjomat 2. jest dualny do 3.

Zobaczmy teraz, jaka jest wersja dualna aksjomatu 4. Jest ona następującej postaci: Istnieją cztery proste, spośród których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Istnienie takiej figury (nazywanej czworobokiem) możemy wykazać, korzystając właśnie z aksjomatu 4: Wiemy, że istnieje czworokąt $abcd$. Weźmy dwie pary przeciwległych boków tego czworokąta, np. ab, cd oraz ac, bd. Gdyby pewne trzy spośród tych boków przecinały się w jednym punkcie, musiałyby przecinać się w jednym z wierzchołków czworokąta. Ale przez każdy wierzchołek przechodzą dokładnie dwa z tych boków. Zatem ab, cd, ac, bd jest czworobokiem i aksjomat dualny do 4. jest prawdziwy.

Aksjomat dualny do 5. jest postaci: Przekątne czworoboku (czyli punkty łączące przeciwległe wierzchołki czworoboku) nie przecinają się w jednym punkcie. Łatwo zauważyć (na przykład wykonując rysunek), że taki warunek jest równoważny aksjomatowi 5.

Aksjomat dualny do 6. wygląda następująco: Niech dany będzie sześciobok, którego kolejne boki należą do dwóch pęków. Wówczas proste łączące przeciwległe wierzchołki sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Niech a, b będą punktami, przez które przechodzą oba pęki. Kolejne wierzchołki sześcioboku oznaczmy przez x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Pokażemy, że proste x_1x_4, x_2x_5 oraz x_3x_6 są współpękowe. Niech c będzie punktem przecięcia x_1x_4 z x_2x_5 (rys.5). Wystarczy pokazać, że punkty x_3, x_6 oraz c są współliniowe. Jednak wynika to wprost z twierdzenia Pappusa dla sześciokąta $bx_4x_1ax_2x_5$ wpisanego w proste bx_1 oraz ax_4. Pokazuje to, że aksjomat 6. ma prawdziwy swój dualny odpowiednik, wobec czego zasada dualności została wykazana.



rys.5

2.4.4 Krzywa stożkowa

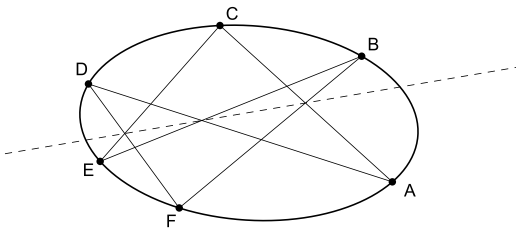
Ostatnie, ważne dla nas pojęcie. Jest to zbiór punktów powstałych na przecięciu stożka (ściślej powierzchni stożkowej, której kierującą jest okrąg) i płaszczyzny. Krzywe stożkowe są nazywane inaczej krzywymi drugiego stopnia, gdyż można je w kartezjańskim układzie współrzędnych opisać równaniem algebraicznym drugiego stopnia względem obu zmiennych x i y. Stożkowe można na nasze potrzeby uznać za rzuty okręgu na płaszczyznę. Łatwo sobie wyobrazić, że krzywe te to po prostu okrąg, elipsa, parabola i hiperbola. Ich uproszczone równania to:

- $x^2 + y^2 = a^2$ dla okręgu
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dla episy,
- $ax^2 - y = 0$ dla paraboli,
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dla hiperboli.

Wiedza ta w zupełności nam wystarczy.

2.5 Twierdzenie Pascala

Niech dane będzie sześć punktów A, B, C, D, E, F leżących na krzywej stożkowej, zaś K, L, M oznaczają punkty przecięć odpowiednio prostych DF z EC, DA z EB oraz CA z FB. Wówczas punkty K, L, M są współliniowe (rys.6).



rys.6

2.5.1 Dowód pierwszy

Bez straty ogólności niech punkty A, B, C, D, E, F leżą na okręgu. Przyjmijmy oznaczenia $AF \cap DC = K$, $AB \cap DE = J$, $EF \cap CB = L$, $DE \cap BC = I$, $FA \cap BC = G$, $DE \cap GF = H$ (rys.7). Z twierdzenia Menelaosa otrzymujemy następujące trzy równości:

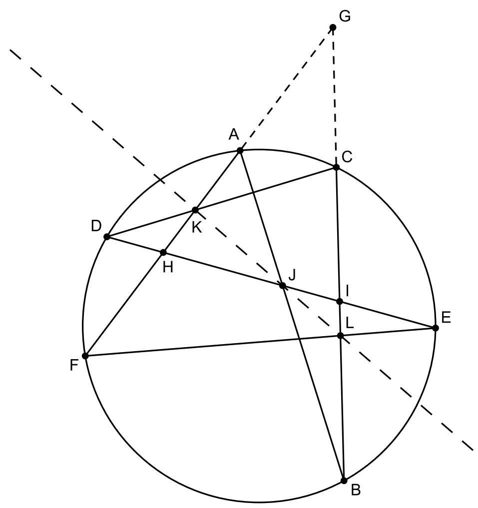
$$\frac{HK}{KG} \cdot \frac{GC}{CI} \cdot \frac{ID}{DH} = 1, \quad \frac{HA}{AG} \cdot \frac{GB}{BI} \cdot \frac{IJ}{JH} = 1, \quad \frac{HF}{FG} \cdot \frac{GL}{LI} \cdot \frac{IE}{EH} = 1$$

Mnożąc powyższe równości stronami, otrzymujemy zależność:

$$\frac{HK}{KG} \cdot \frac{IJ}{JH} \cdot \frac{GL}{LI} = \frac{IB \cdot IC}{ID \cdot IE} \cdot \frac{HD \cdot HE}{HF \cdot HA} \cdot \frac{GA \cdot GF}{GC \cdot GB} \tag{11}$$

Jak łatwo jednak zauważyć, zachodzą ponadto równości:

$$IB \cdot IC = ID \cdot IE, \; HD \cdot HE = HF \cdot HA, \; GA \cdot GF = GC \cdot GB$$



rys.7

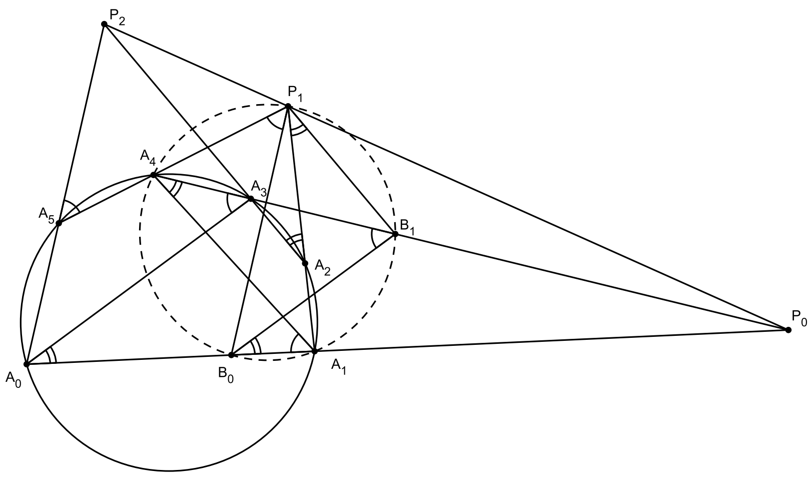
Wobec czego prawa strona równości (11) jest równa 1, a to w dalszej kolejności oznacza, że

$$\frac{HK}{KG} \cdot \frac{GL}{LI} \cdot \frac{IJ}{JH} = 1$$

Co na mocy twierdzenia Menelaosa oznacza, że punkty J, K, L są współliniowe, czyli mamy tezę.

2.5.2 Dowód drugi

Niech na okręgu leżą punkty $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5$, a ponadto $A_0A_1 \cap A_3A_4 = P_0,\ A_1A_2 \cap A_4A_5 = P_1,\ A_2A_3 \cap A_5A_0 = P_2$. Poprowadźmy okrąg przez punkty $A_1,\ A_4,\ P_1$. Niech przecina on proste A_0A_1 w punkcie B_0 różnym od A_1 oraz A_3A_4 w punkcie B_1:



Przeliczając kąty oparte na tych samych łukach i dopełniające się do kątów półpełnych, stwierdzamy kolejno:

$$\angle P_2A_5A_4 = \angle A_0A_1A_4 = \angle A_0A_3A_4 = \angle A_4P_1B_0 = \angle A_4B_1B_0$$

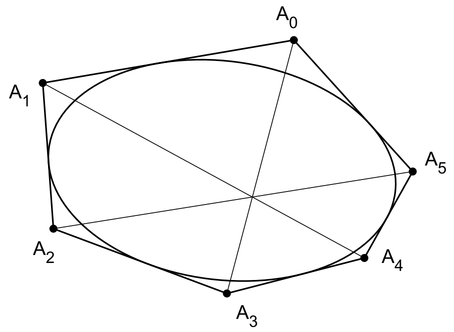
Podobnie:

$$\angle P_1A_2P_2 = \angle A_3A_0A_1 = \angle A_3A_4A_1 = \angle B_1A_4A_1 = \angle B_1P_1A_1 = \angle B_1B_0A_1$$

Z równości $\angle A_3A_0A_1 = \angle B_1B_0A_1$ wnosimy, że $A_0A_3||B_0B_1$. Ponadto $\angle P_2A_5P_1 = \angle A_5P_1B_0$, skąd $P_2A_0||P_1B_0$. W końcu $\angle P_2A_2P_1 = \angle A_2P_1B_1$, skąd $P_2A_3||P_1B_1$. Oznacza to, że trójkąty $P_2A_3A_0$ oraz $P_1B_1B_0$ mają równoległe odpowiednie boki, a więc są jednokładne. Środek jednokładności leży na przecięciu trzech prostych łączących odpowiednie wierzchołki, czyli na prostych P_2P_1, A_4A_3 oraz A_0A_1. Ale przecięcie prostych A_0A_1 z A_4A_3 to punkt P_0. Oznacza to, że punkty P_0, P_1, P_2 są współliniowe, a to kończy dowód.

2.6 Twierdzenie Brianchona

Niech sześciokąt o wierzchołkach A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 będzie opisany na krzywej stożkowej. Wówczas przekątne A_0A_3, A_1A_4, A_2A_5 przecinają się w jednym punkcie (rys.8).



rys.8

2.6.1 Dowód:

Wystarczy zauważyć, że jest to twierdzenie dualne do twierdzenia Pascala, wobec czego na mocy zasady dualności, udowodnionej wcześniej, twierdzenia te są równoważne.

3 Zadania

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC = AC$. Punkty P i Q leżą wewnątrz tego trójkąta i spełniają zależności $\angle PAC = \angle QBA$ oraz $\angle PBC = \angle QAB$. Dowieść, że punkty C, P i Q leżą na jednej prostej.

2. Na okręgu danych jest pięć punktów. Używając jedynie linijki, skonstruować szósty punkt na tym okręgu.

3. Punkt M leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Niech R będzie dowolnym punktem. Proste AR, BR i CR przecinają okrąg opisany odpowiednio w punktach $A_1,\ B_1,\ C_1$. Udowodnić, że punkty przecięć MA_1 z BC, MB_1 z CA oraz MC_1 z AB leżą na jednej prostej, która przechodzi przez punkt R.

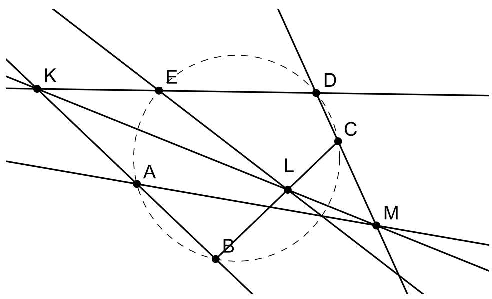
4. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg o. Niech E będzie dowolnym punktem leżącym na boku AB. Ponadto niech $DE \cap BC = F,\ DE \cap o = P \neq D,\ BP \cap AF = Q$ oraz $QE \cap CD = V$. Udowodnić, że położenie punktu V nie zależy od wyboru punktu E.

4 Szkice rozwiązań

1. Niech $AP \cap BQ = K$ oraz $BP \cap AQ = L$. Wówczas z danych w treści zadania równości kątów wynika, że punkty $K,\ L,\ A,\ B$ leżą na jednym okręgu, który jest styczny do prostych AC oraz BC. Korzystając z twierdzenia Pascala dla sześciokąta zdegenerowanego $AAKBBL$ uzyskujemy tezę.

2. Oznaczmy dane punkty kolejno $A,\ B,\ C,\ D,\ E$. Przypuśćmy, że skonstruowaliśmy punkt F należący do tego samego okręgu. Oznaczmy punkty przecięć AB z DE, BC z EF oraz CD z FA kolejno jako K, L, M. Zgodnie z twierdzeniem Pascala, leżą one na jednej prostej.

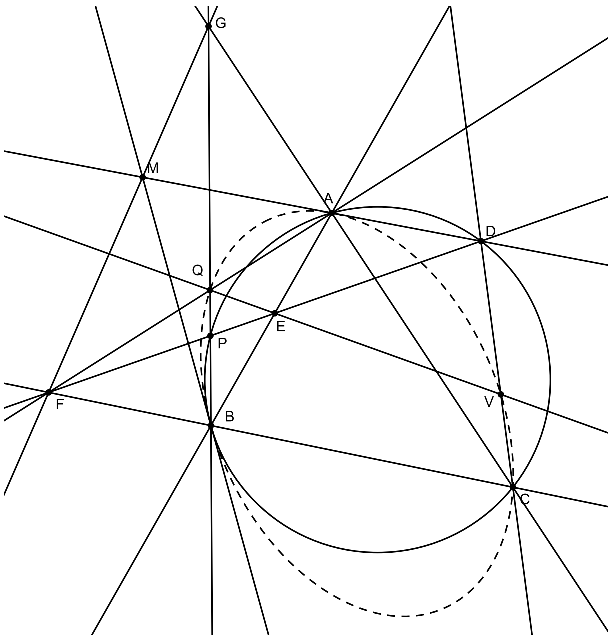
Z powyższego stwierdzenia wynika następująca konstrukcja: Wykreślamy dowolną prostą p przechodzącą przez E i oznaczamy punkt jej przecięcia z BC jako L. Wyznaczamy teraz punkty przecięcia AB z DE jako K i KL z CD jako M. Punkt F jest przecięciem AM i p (rys.9).



rys.9

3. Niech $A_2,\ B_2,\ C_2$ będą punktami przecięć kolejno MA_1 z BC, MB_1 z CA oraz MC_1 z AB. Stosując twierdzenie Pascala na punktach $M,\ A_1,\ A,\ C,\ B,\ B_1$ dostajemy, że punkty A_2, B_2 i R leżą na jednej prostej. W podobny sposób stwierdzamy, że A_2, C_2 i R leżą na jednej prostej. Wynika stąd, że A_2, B_2, C_2 i R leżą na jednej prostej.

4. Wprowadźmy oznaczenia: $BC \cap DP = F$, $CA \cap PB = G$. Niech styczna do o w punkcie B przecina AD w punkcie M. Niech $\mathcal{K}$ będzie stożkową przechodzącą przez A, B, C oraz styczną do MA, i MB (rys.10).



rys.10

Z twierdzenia Pascala dla zdegenerowanego sześciokąta $BBCADP$ otrzymujemy współliniowość punktów M, F, G. Ponownie, z twierdzenia Pascala dla zdegenerowanego sześciokąta $AAQBBC$ otrzymujemy $Q \in \mathcal{K}$. Oznacza to, że V jest drugim przecięciem $\mathcal{K}$ z CD. Ale $\mathcal{K}$ nie zależy od E. Dowód został więc zakończony.