

”Prymitywy matematyczne”

Twierdzenie 1. Dla dowolnych $A, B, C \subset X$ prawdziwe są równości:

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $\emptyset \cup A = A, \emptyset \cap A = \emptyset$
5. $A \cup A' = X, A \cap A' = \emptyset$
6. $X \cap A = A, X \cup A = X$
7. $(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$ (prawa de Morgana)

Przykład 2.

Zbadać czy prawdziwe są równości

- $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
- $A \cup (B \setminus C) = [(A \cup B) \setminus C] \cup (A \cap C)$
- $A \cap (A \cup B) = A$
- $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$

Definicja 3 (Kuratowski). Parę uporządkowaną nazywamy zbiór:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Twierdzenie 4.

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$$

Dowód. 1. Załóżmy, że $a \neq b$. Zgodnie z definicją 3 mamy:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$(c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

$$\begin{aligned}
(a, b) = (c, d) &\iff \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \iff \\
&\iff (\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}) \vee (\{a\} = \{c, d\} \wedge \{a, b\} = \{c\}) \xLeftrightarrow{a \neq b} \\
&\xLeftrightarrow{a \neq b} \{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\} \iff a = c \wedge b = d
\end{aligned}$$

2. $a = b$. Wtedy zgodnie z definicją 3 mamy:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= (a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\} \\
(c, d) &= \{\{c\}, \{c, d\}\}
\end{aligned}$$

$$(a, a) = (c, d) \iff \{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \iff c = d = a = b$$

□

Definicja 5. *Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par (a, b) takich, że $a \in A$ oraz $b \in B$. Zbiór ten oznaczamy symbolem $A \times B$.*

Przykład 6.

Dla przykładu położmy:

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3\} \\
B &= \{\clubsuit, \spadesuit\}
\end{aligned}$$

Wtedy:

$$\begin{aligned}
A \times B &= \{(1, \clubsuit), (1, \spadesuit), (2, \clubsuit), (2, \spadesuit), (3, \clubsuit), (3, \spadesuit)\} \\
B \times A &= \{(\clubsuit, 1), (\clubsuit, 2), (\clubsuit, 3), (\spadesuit, 1), (\spadesuit, 2), (\spadesuit, 3)\} \\
B \times B &= \{(\clubsuit, \clubsuit), (\clubsuit, \spadesuit), (\spadesuit, \clubsuit), (\spadesuit, \spadesuit)\}
\end{aligned}$$

Twierdzenie 7. *Iloczyn Kartezjański ma następujące własności:*

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C) & (1) \\
(A \cup B) \times (C \cup D) &= (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D) & (2) \\
(A \setminus B) \times C &= (A \times C) \setminus (B \times C) & (3) \\
(A \cap B) \times (C \cap D) &= (A \times C) \cap (B \times D) & (4)
\end{aligned}$$

Definicja 8. Relacją określoną na zbiorze $A \times B$ nazywamy dowolny zbiór $R \subseteq A \times B$

Jeśli para (x, y) należy do relacji R to często piszemy xRy

Niech $R \subseteq X \times X$. Relacja R może mieć następujące własności

- zwrotność: $\bigwedge_{x \in X} xRx$
- symetryczność: $\bigwedge_{x, y \in X} xRy \implies yRx$
- przechodność: $\bigwedge_{x, y, z \in X} xRy \wedge yRz \implies xRz$
- antysymetryczność: $\bigwedge_{x, y \in X} xRy \implies (y, x) \notin R$
- słaba antysymetryczność: $\bigwedge_{x, y \in X} xRy \wedge yRx \implies y = x$

Niech $R \subseteq X \times Y$

- prawostronna jednoznaczność $\bigwedge_{x \in X, y, y' \in Y} xRy \wedge xRy' \implies y = y'$

Definicja 9 (Funkcja). Jeśli relacja $f \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją jeśli jest prawostronnie jednoznaczna oraz $\bigwedge_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} xfy$.

Definicja 10 (Relacja częściowego porządku). Relację $P \subseteq X \times X$ nazywamy relacją częściowego porządku jeśli jest zwrotna, przechodnia i słabo antysymetryczna.

Przykład 11.

Przykłady relacji częściowego porządku:

1. $\mid \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}^2, a \mid b \iff \bigvee_{k \in \mathbb{N}} b = ka$
2. $\leq \subseteq \mathbb{N}^2$

Definicja 12 (Relacja równoważności). Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy relacją równoważności jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykład 13.

Przykłady relacji równoważności

1. $\parallel$ (równoległości prostych)
2. $R \subseteq \mathbb{N}^2, aRb \iff a \bmod 2 = b \bmod 2$

Definicja 14. Niech $R \subseteq X^2$ będzie relacją równoważności, $x \in X$. Zbiór $[x] := \{y \in X : xRy\}$ nazywamy klasą abstrakcji elementu x względem relacji R .

Twierdzenie 15 (Zasada abstrakcji). Niech $R \subseteq X^2$ będzie relacją równoważności, wówczas:

1. $\bigwedge_{x \in X} x \in [x]$
2. $X = \bigcup_{x \in X} [x]$
3. $\bigwedge_{x, y \in X} [x] = [y] \vee [x] \cap [y] = \emptyset$
4. $\bigwedge_{x, y \in X} [x] = [y] \iff xRy$

Dowód. 1. R jest relacją równoważności, zatem $\bigwedge_{x \in X} xRx$ Z definicji 14 $[x] := \{y \in X : xRy\}$, Zatem $x \in [x]$.

2. Załóżmy nie wprost, że $X \neq \bigcup_{x \in X} [x]$ zatem $\bigcup_{x \in X} [x] \subset X$ (przeciwna inkluzja nie może zachodzić). Skoro tak to istnieje takie $x_0 \in X$, że $x_0 \notin \bigcup_{x \in X} [x]$. Zatem $\bigwedge_{x \in X} \neg x_0Rx$ co jest sprzeczne z założeniem, że R jest relacją równoważności (dokładnie z tym, że R jest zwrotna).

3. Załóżmy nie wprost, że $\bigvee_{x, y \in X} [x] \neq [y] \wedge [x] \cap [y] \neq \emptyset$. Bez straty ogólności dowodu przyjmijmy, że $\bigvee_{a \in [x]} a \notin [y]$. Niech $b \in [x] \cap [y]$. Wtedy: $a \in [x] \wedge a \notin [y] \wedge b \in [x] \wedge b \in [y] \iff aRx \wedge \neg aRy \wedge bRx \wedge bRy \iff aRb \wedge \neg aRy \wedge bRy \iff aRy \wedge \neg aRy$. Sprzeczność.

4($\implies$) Ustalmy $x, y \in X$ takie, że $[x] = [y]$. Niech $a \in [x]$, wtedy $b \in [y]$. Skoro $a \in [x] = [y]$ to aRx oraz bRy . Z symetrii oraz przechodniości relacji R mamy, że xRy

($\impliedby$) Ustalmy $x, y \in X$ takie, że xRy . Niech $c \in [x]$. $c \in [x] \iff cRx \iff cRy \iff c \in [y]$

□

Twierdzenie 16. Jeśli zbiory $A_t \subseteq X, t \in T$ spełniają następujące warunki:

1. $\bigcup_{t \in T} A_t = X$
2. $\bigwedge_{t \in T} A_t \neq \emptyset$
3. $\bigwedge_{s, t \in T} s \neq t \implies A_s \cap A_t = \emptyset$

to istnieje taka relacja równoważności $R \subseteq X^2$, że zbiory $A_t, t \in T$ są jej klasami abstrakcji.

Dowód. Rozważmy relację $R \subseteq X^2$ określoną następująco:

$$xRy \iff \bigvee_{t \in T} x, y \in A_t$$

Pokażemy, że wyżej określona relacja R jest relacją równoważności:

1. Zwrotność i symetryczność są oczywiste
2. Przechodność. Niech $x, y, z \in X$ oraz $xRy \wedge yRz$. xRy zatem istnieje dokładnie jedno (zbiory $A_t, t \in T$ są parami rozłączne) takie t , że $x, y \in A_t$. yRz zatem istnieje dokładnie jedno takie s , że $y, z \in A_s$. $y \in A_t \wedge y \in A_s \implies s = t \implies xRz$

□

Przykład 17.

Dla danego zbioru X oraz relacji $R \subseteq X^2$ zbadać czy R jest relacją równoważności i jeśli tak to wskazać klasy abstrakcji.

1. $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $xRy \iff \bigvee_{t \in \mathbb{N}} xy = t^2$
2. $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, $(a, b)R(c, d) \iff ad = cd$