

Od prawdopodobieństwa do funkcji Riemanna i sztuczki Eulera

„Czytajcie Eulera.
On jest mistrzem nas wszystkich.”
Pierre Simon de Laplace

Streszczenie

Wychodzimy od następującego elementarnego pytania:

Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany ułamek jest nieskracalny?

Dla uproszczenia zakładamy, że losujemy ułamek dodatni, a doświadczenie polega na niezależnym wybraniu dwóch liczb naturalnych stanowiących odpowiednio licznik i mianownik ułamka. Poprzez elementarny, niemniej bardzo pomysłowy trik (który po raz pierwszy został użyty prawdopodobnie przez Leonharda Eulera gdy pokazywał on nieskończoność sumy odwrotności wszystkich liczb pierwszych) sprowadzamy problem do obliczenia sumy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Inaczej mówiąc, naszym zadaniem jest wyznaczenie wartości funkcji ζ Riemanna w punkcie $s = 2$. Funkcja ta dla rzeczywistych argumentów $s > 1$ określona jest wzorem

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Jej związek z postawionym problemem probabilistycznym polega na czymś głębszym niż tylko to, że jej wartość w punkcie $s = 2$ zgadza się z poszukiwaną przez nas wartością sumy szeregu. Można bowiem zauważyć, że obliczanie wartości funkcji ζ w innych punktach daje odpowiedzi na inne problemy związane z rachunkiem prawdopodobieństwa i liczbami naturalnymi.

Funkcję ζ określoną poprzez wyżej napisany wzór dla argumentów $s > 1$ rozważał już Euler. Nieprawdopodobnym w skutkach pomysłem Bernharda Riemanna z roku 1859 było rozważenie przedłużenia tej funkcji dla argumentów zespolonych¹.

Prezentujemy pochodzący od Eulera i odarty w 1734 roku elementarny, niesamowity w swojej pomysłowości dowód następującego wzoru:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

jednego z piękniejszych wzorów matematyki.

¹Funkcja ζ Riemanna jest określona dla wszystkich liczb zespolonych różnych od jedności. Jest ona tzw. funkcją analityczną, a jej badanie przekłada się na badanie rozmieszczenia liczb pierwszych.