Liczby rzeczywiste

Mikołaj Stańczyk

Koło Naukowe Matematyków UŚ

17 lutego 2012

Kilka naprawdę niezbędnych pojęć

Definition

S jest zbiorem nieskończonym. Mówimy, że *prawie wszystkie elementy* S *mają własność* ϕ, jeśli zbiór tych elementów zbioru S które nie mają własności ϕ jest skończony.

Examples

Na przykład prawie wszystkie liczby naturalne są większe od 10^{10}.

Definition

Mówimy, że ciąg (a_n) liczb wymiernych jest *zbieżny* do liczby wymiernej g jeśli dla każdej dodatniej liczby wymiernej ε:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

dla prawie wszystkich liczb naturalnych n.
Piszemy wówczas $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.

Definition

Mówimy, że ciąg (a_n) liczb wymiernych jest ciągiem Cauchy'ego, jeśli dla każdej dodatniej liczby wymiernej ε:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

dla prawie wszystkich liczb naturalnych n i wszystkich $m \geqslant n$.

Definition

Mówimy, że zbiór K z określonymi na nim działaniami $+, \ \cdot$ i wyróżnionymi elementami $0, 1 \in K$ tworzy *ciało* jeśli:

- $a + b = b + a$
- $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a + 0 = 0 + a = a$
- dla każdego $a \in K$ istnieje takie $b \in K$, że $a + b = 0$
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- dla każdego $a \in K \setminus \{0\}$ istnieje takie $b \in K$, że $a \cdot b = 1$
- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (b \cdot c)$

Czy naprawdę nie wystarczą nam liczby wymierne?

Zbiór $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych jest ciałem, ale ciało to jest zbyt skromne dla potrzeb matematyki.
W świecie liczb wymiernych:

Fakt

W kwadracie o boku długości 1 przekątna nie ma długości.

Fakt

Ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest ciągiem Cauchy'ego ale nie ma granicy.

Liczby rzeczywiste - czym są?

W zbiorze $\mathbb{Q}$ wszystkich liczb wymiernych rozważmy zbiór $x \subseteq \mathbb{Q}$ o następujących własnościach:

- x jest niepusty i $x \neq \mathbb{Q}$
- Jeżeli liczba wymierna p jest elementem x, to każda liczba wymierna $q < p$ jest elementem x.
- Jeżeli liczba wymierna p należy do x, to istnieje liczba wymierna $p' > p$ należąca do x.

Examples

Zbiór $x = \{p \in \mathbb{Q}| \ p^2 < 2 \text{ lub } p < 0\}$ spełnia powyższe założenia. Oczywiście istnieje wiele takich zbiorów.

Definition

Zbiór wszystkich x spełniających powyższe warunki nazywamy zbiorem liczb rzeczywistych i oczanczamy symbolem $\mathbb{R}$.

W zbiorze liczb rzeczywistych określamy nierówność i działania arytmetyczne: $x \leqslant y \iff x \subseteq y$
$x < y \iff x \leqslant y \text{ i } x \neq y$
$x + y := \{p + q |\ p \in x,\ q \in y\}$
Jeżeli $x, y \geqslant 0$, to $x \cdot y := \{p \cdot q |\ p \in x,\ q \in y\}$.
Jeżeli $x \geqslant 0, y < 0$, to $x \cdot y := -(x \cdot (-y))$ itd...

Każda liczba rzeczywista jest ułamkiem (PS. To prawda.)

W szkole liczby wymierne zapisujemy w postaci np. $\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \dots$. Jest jasne że każdą liczbę wymierną możemy zapisać w ten sposób. Innym typem ułamka jest ułamek łańcuchowy.

examples

Weźmy liczbę wymierną $\frac{19}{7}$. Mamy:
$19 = 2 \cdot 7 + 5$
$7 = 1 \cdot 5 + 2$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$
$2 = 2 \cdot 1$

$$\frac{19}{7} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

Każdą liczbę wymierną można oczywiście przedstawić w postaci ułamka łańcuchowego (algorytm Euklidesa). Niech teraz α będzie liczbą niewymierną. Mamy:

$\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\alpha_1},\ \alpha_1 > 1$

$\alpha_1 = [\alpha_1] + \frac{1}{\alpha_2},\ \alpha_2 > 1$

$\alpha_2 = [\alpha_2] + \frac{1}{\alpha_3},\ \alpha_3 > 1$

....

Jeżeli oznaczymy $a_i := [\alpha_i]$, to mamy:

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots_{a_{n+1}}}}}} =: a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Rozwijamy!

Przedstawimy $\sqrt{2}$ w postaci ułamka łańcuchowego.
$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$
$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$
$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$
. . . .
Czyli

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Słynne liczby rzeczywiste

Złota liczba ϕ — złoty podział odcinka, dodatni pierwiastek równania $x = 1 + \frac{1}{x}$.
Mamy oczywiście

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Stosunek obwodu okręgu do średnicy — liczba π.

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Nieokresowe rozwinięcie w ułamek nieskończony — kolejnymi mianownikami cząstkowymi są $292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, \ldots$.

Stała Eulera e — najsłynniejsza liczba rzeczywista — granica ciągu $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$.

$$\mathrm{e} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}$$

Jak dużo jest liczb rzeczywistych?

Liczby całkowite i wymierne można oczywiście ustawić w ciąg. Nie da się jednak ustawić w ciąg wszystkich liczb rzeczywistych.
Załóżmy, że (α_n) jest ciągiem wszystkich liczb rzeczywistych. Niech $A = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$, gdzie a_i jest i-tym mianownikiem częściowym liczby α_i powiększonym o 1. Oczywiście A nie jest wyrazem tego ciągu.

Jeszcze bardziej niewymierne!

Definition

Liczbę rzeczywistą x, która jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach całkowitych nazywamy liczbą algebraiczną.

Examples

$\sqrt{2}$ jest liczbą algebraiczną, ϕ jest liczbą algebraiczną.

Łatwo jednak zauważyć, że liczb algebraicznych jest tyle samo co liczb wymiernych i całkowitych. Zatem olbrzymia większość liczb rzeczywistych w ogóle nie jest algebraiczna.

Definition

Liczbę rzeczywistą x, która nie jest algebraiczna nazywamy liczbą przestępną.

Examples

Liczba Liouville'a $l = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$ jest liczbą przestępną. π, e są liczbami przestępnymi. $2^{\sqrt{2}}$ jest przestępna.

Alternatywy dla liczb rzeczywistych

Liczby p-adyczne! Dla każdej liczby pierwszej p można skonstruować ciało liczb p-adycznych $\mathbb{Q}_p$, które jest *równie dobre* jak ciało $\mathbb{R}$. Niestety, konstrukcja ciał $\mathbb{Q}_p$ jest bardzo skomplikowana...

Ale to jeszcze nie wszystko, prawda?

Oczywiście.
W ciele $\mathbb{R}$ równanie $x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązania. Dlatego też $\mathbb{R}$ rozszerza się dalej, do tzw. ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Ale o tym innym razem...