

1 Pojęcia pomocnicze

Otoczeniem punktu x nazywamy dowolny zbiór otwarty zawierający punkt x . Najczęściej rozważamy otoczenia kuliste, tj. kule o danym promieniu ε i środku x . **Sąsiedztwem** punktu x nazywamy taki zbiór $S, x \notin S$, że $S \cup \{x\}$ jest otoczeniem punktu x .

Przez otoczenie nieskończoności na prostej rozumiemy przedział (a, ∞) .

Punktem skupienia zbioru A nazywamy taki punkt x , że do każdego sąsiedztwa punktu x należy przynajmniej jeden element zbioru A (przekrój otoczenia i zbioru A jest niepusty). Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru A oznaczamy A^d i czasem nazywamy pochodną zbioru A . Punkty należące do zbioru $A \setminus A^d$ nazywamy punktami izolowanymi.

Obrazem zbioru A przez funkcję f nazywamy zbiór wartości funkcji f dla argumentów ze zbioru A i oznaczamy $f(A)$.

Przykład 1.

A	A^d
$(0, 1)$	$[0, 1]$
$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$	$\{0\}$
$(0, 1) \cup \{5\}$	$[0, 1]$

2 Granice funkcji

2.1 Definicje i 'definicje'

Definicja 1 ('definicja' Cauchy'ego). Niech $(X, \rho), (Y, \sigma)$ będą przestrzeniami metrycznymi, $D \subset X$. Liczbę g nazywamy granicą funkcji $f : D \rightarrow Y$ w punkcie $x_0 \in D^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \left(0 < \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), g) < \varepsilon \right)$$

Definicja 2 ('definicja' Heinego). Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $D \subset X$. Liczbę g nazywamy granicą funkcji $f : D \rightarrow Y$ w punkcie $x_0 \in D^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni X zbieżnego do x_0 i takiego, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n \neq x_0$ odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $f \{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do g . Takie ciągi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy ciągami Heinego.

Definicja 3 (definicja 'prawdziwa'). Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $D \subset X$. Liczbę g nazywamy granicą funkcji $f : D \rightarrow Y$ w punkcie $x_0 \in D^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego O_g - otoczenia punktu g istnieje takie S_{x_0} - sąsiedztwo punktu x_0 , że $f(S_{x_0} \cap D) \subset O_g$.

Symbolicznie:

$$\forall_{O_g} \exists S_{x_0} f(S_{x_0} \cap D) \subset O_g$$

Twierdzenie 1. *Wszystkie te definicje są parami równoważne.*

2.2 Twierdzenia o ciągach $\Rightarrow$ twierdzenia o granicach

Twierdzenie 2. *Jeżeli granica funkcji f w punkcie x_0 istnieje, to jest jedyna.*

Dowód. Skorzystam w dowodzie z definicji Heinego. Gdyby funkcja f miała w punkcie x_0 dwie różne granice, wtedy ciąg $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ musiałby, w zależności od doboru ciągu $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, być zbieżny do dwóch różnych punktów, co od razu daje nam sprzeczność, gdyż granica tego ciągu wg definicji jest niezależna od wyboru ciągu $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i, z odpowiedniego twierdzenia o ciągach, jest jedyna. $\square$

Twierdzenie 3. *Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $D \subset X$, $f, g : D \rightarrow Y$ będą funkcjami oraz $x_0 \in D^d$. Wówczas:*

1.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Jeżeli dodatkowo dla $D \ni x$ z pewnego otoczenia x_0 $g(x) \neq 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, to

4.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

Dowód. Ponownie skorzystamy z definicji Heinego. Niech $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem spełniającym założenia definicji (w przypadku 4 niech dodatkowo elementy tego ciągu należą do tego otoczenia x_0 , dla którego $g(x) \neq 0$). Wtedy $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ i z odpowiednich twierdzeń o ciągach otrzymujemy tezę. $\square$

Twierdzenie 4 (O trzech funkcjach). *Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $D \subset X$, $f, g, h : D \rightarrow Y$ będą funkcjami takimi, że dla pewnego otoczenia punktu x_0 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$. Wówczas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.*

Dowód. Ponownie skorzystamy z definicji Heinego. Weźmy ciąg Heinego, którego elementy należą do otoczenia x_0 , w którym jest zachowana nierówność $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Wówczas z twierdzenia o trzech ciągach uzyskujemy tezę. $\square$

Przykład 2. *Obliczyć granicę*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\begin{array}{ccccc} -1 & \leq & \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \leq & 1 \\ -\sqrt{x} & \leq & \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \leq & \sqrt{x} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

3 Ciągłość funkcji

3.1 Definicje i 'definicje'

Definicja 4. Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $D \subset X$. O funkcji $f : D \rightarrow Y$ powiemy, że jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy x_0 jest punktem izolowanym zbioru D lub $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. O funkcji która jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny mówimy krótko, że jest ciągła.

Definicja 5 ('definicja' Cauchy'ego). Niech $(X, \rho), (Y, \sigma)$ będą przestrzeniami metrycznymi, $D \subset X$. Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \left(\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \right)$$

Definicja 6 ('definicja' Heinego). Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $D \subset X$. Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni X zbieżnego do x_0 odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $f\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do $f(x_0)$.

Definicja 7. Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $D \subset X$. Funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $O_{f(x_0)}$ - otoczenia punktu $f(x_0)$ istnieje takie U_{x_0} - otoczenie punktu x_0 , że $f(U_{x_0} \cap D) \subset O_{f(x_0)}$. Symbolicznie:

$$\forall O_{f(x_0)} \exists U_{x_0} f(U_{x_0} \cap D) \subset O_{f(x_0)}$$

Twierdzenie 5. Wszystkie te definicje są parami równoważne.

Twierdzenie 6. Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi, $D \subset X$. Jeżeli $f, g : D \rightarrow Y$ są funkcjami ciągłymi w punkcie $x_0 \in D$, to ich suma, różnica oraz iloczyn również. Jeżeli dodatkowo $g(x_0) \neq 0$, to iloraz $\frac{f}{g}$ również jest funkcją ciągłą w punkcie x_0 .

Dowód. Jest to bezpośredni wniosek z odpowiednich twierdzeń o granicach funkcji. □

Twierdzenie 7 (O granicy złożenia). Niech X, Y, Z będą przestrzeniami metrycznymi, $D \subset X$. Jeżeli $f : D \rightarrow Y$ jest funkcją ciągłą w x_0 , a $g : f(D) \rightarrow Z$ w $y_0 := f(x_0)$, to funkcja $g \circ f : D \rightarrow Z$ jest ciągła w x_0 .

3.2 Zabijanie intuicji

- Ciągłość nie oznacza, że wykres funkcji da się narysować 'bez odrywania ołówka' od kartki.

Przykład 3.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ g : (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \\ g(x) &= 1 \end{aligned}$$

- Odwrotność funkcji ciągłej nie musi być ciągła.

Przykład 4.

$$\begin{aligned} f : (-\infty, 0) \cup [1, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ x-1 & \text{dla } x \in [1, \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

- Funkcja Riemanna, określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, x - \text{nieskracalny.} \end{cases}$$

Jest ona ciągła dla wszystkich x niewymiernych.

4 Pochodne

4.1 Definicja

Niech f będzie pewną funkcją rzeczywistą (o wartościach rzeczywistych). Rozważmy następujący iloraz, nazywany ilorazem różnicowym:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Łatwo zauważyć, że jest to współczynnik kierunkowy prostej przecinającej wykres funkcji f w punktach $(x, f(x))$ oraz $(x_0, f(x_0))$. Zmierzając teraz z x do x_0 , uzyskamy prostą styczną do wykresu funkcji f w punkcie x_0 .

Definicja 8. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, $x_0 \in D$. Granicę (o ile istnieje) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy $f'(x_0)$.

Możemy też przyjąć oznaczenia:

$$h := x - x_0$$

$$x = x_0 + h.$$

Wtedy nasza granica przyjmuje postać $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Jeżeli funkcja f posiada pochodną w punkcie x_0 to mówimy, że jest w tym punkcie różniczkowalna. Jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie pewnego zbioru A , mówimy, że jest różniczkowalna w zbiorze A . W szczególności, jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny, mówimy, że jest różniczkowalna.

4.2 Twierdzenia podstawowe

Twierdzenie 8. Jeżeli funkcja f jest w punkcie x_0 różniczkowalna, to jest w tym punkcie ciągła.

Dowód.

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

Obkładając obie strony granicą $\lim_{x \rightarrow x_0}$, uzyskujemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

czyli f jest ciągła w x_0 . □

Twierdzenie 9 (O pochodnej złożenia). Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b), f$ różniczkowalna w x_0, g różniczkowalna w $y_0 := f(x_0)$. Wówczas $g \circ f$ jest funkcją różniczkowalną w x_0 oraz

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dowód. Rozważmy dwa przypadki.

- Istnieje takie sąsiedztwo S_{x_0} punktu x_0 , że $\forall_{x \in S_{x_0}} f(x) = f(x_0)$. Wówczas dla $x \in S_{x_0}$ $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, więc również $f'(x_0) = 0$. Musimy więc wykazać, że $(g \circ f)'(x_0) = 0$.
Rozpatrzmy ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do x_0 taki, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n \in S_{x_0}$. Wówczas $f(x_n) = f(x_0)$, więc

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(f(x_0)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

- Takie sąsiedztwo nie istnieje. Wówczas

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 10 (Pochodna sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu). Rozważmy funkcje $f, g : \mathbb{R} \supset (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, różniczkowalne w punkcie $x_0 \in (a, b)$. Wówczas:

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
- $(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- Jeżeli dodatkowo $g(x_0) \neq 0$, to $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Dowód. Dowiedzimy przypadku trzeciego:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \\&= f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0).\end{aligned}$$

□

Zauważmy, że dla danej funkcji różniczkowalnej $f(x)$ możemy wskazać funkcję, która argumentowi funkcji przyporządkowuje wartość pochodnej funkcji f w tym punkcie. Funkcję tę nazywamy pochodną funkcji f i oznaczamy f' . Jeżeli f' jest funkcją różniczkowalną, możemy obliczyć jej pochodną, którą nazywamy drugą pochodną funkcji f i oznaczamy f'' . O funkcji, która ma n pochodnych i której n -ta pochodna jest funkcją ciągłą mówimy, że jest klasy C^n .

4.3 Wzorów parę

$f(x)$	$f'(x)$	<i>Uwagi</i>
c	0	$c \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$, odpowiednie założenia do x
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	
a^x	$a^x \ln a$	W szczególności $(e^x)' = e^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	W szczególności $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Przykład 5.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin^7 \ln\left(\frac{x-3}{2x}\right) \\f'(x) &= 7 \sin^6 \ln\left(\frac{x-3}{2x}\right) \cdot \cos \ln\left(\frac{x-3}{2x}\right) \cdot \frac{2x}{x-3} \cdot \frac{6}{4x^2}\end{aligned}$$

4.4 Zastosowania pierwszej i dalszych pochodnych

Twierdzenie 11 (Związek pochodnej z monotonicznością funkcji). Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w (a, b) . Wówczas zachodzą następujące warunki:

- Jeśli f jest funkcją rosnącą, to $f'(x) \geq 0$;
- Jeśli $f' > 0$, to f jest funkcją silnie rosnącą;
- Jeśli f jest funkcją malejącą, to $f'(x) \leq 0$;
- Jeśli $f' < 0$, to f jest funkcją silnie malejącą.

Definicja 9. Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą. Jeśli dla pewnego otoczenia O_{x_0} punktu $x_0 \in D$ zachodzi warunek:

$$\forall_{x \in O_{x_0} \cap D} f(x) \geq f(x_0)$$

to mówimy, że funkcja f przyjmuje w punkcie x_0 **maksimum lokalne** (**minimum lokalne**). Maksima i minima funkcji określamy wspólnie mianem **ekstremów** funkcji.

Twierdzenie 12 (Warunek konieczny istnienia ekstremum). *Jeśli $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i posiada ekstremum w punkcie x_0 , to $f'(x_0) = 0$.*

Twierdzenie 13 (Warunek wystarczający istnienia ekstremum). *Jeśli $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i istnieje δ taka, że $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f'(x) > 0 \wedge \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) f'(x) < 0$, to funkcja f posiada w punkcie x_0 maksimum lokalne (po zmianie znaków nierówności - minimum lokalne).*

Przykład 6. *Dany jest stożek o promieniu podstawy 3 i wysokości 4. Wpisano w niego walec, zaś w mniejszy stożek ograniczony z dołu górną podstawą walca wpisano kulę. Jakie muszą być wymiary walca i kuli, by suma ich objętości była największa?*
Odp. $r_{kuli} = \frac{8}{7}$, $r_{walca} = \frac{16}{7}$, $h_{walca} = \frac{20}{21}$

Przykład 7. *Pod jakim kątem przecinają się wykresy funkcji $f = x^3$ i $g = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$?*
Odp. Są one prostopadłe.

Drugą pochodną wykorzystuje się do badania wypukłości i wklęsłości funkcji.