Piotr Idzik 18.12.2008

Konstrukcja 1.
Poniższa konstrukcja pokazuje jak podzielić dany odcinek w stosunku wyznaczonym przez dany podział innego odcinka.

1. Niech dany będzie odcinek AB, odcinek XY oraz punkt $Z \in XY$
2. Narysuj półprostą k o początku w punkcje A, przechodzącą przez punkt B
3. Narysuj dowolną inną półprostą l o początku w punkcje A
4. Na półprostej l zacznacz odcinki AC oraz AD o długosciach odpowiednio $|XZ|$ oraz $|XY|$
5. Narysuj prostą m przechodzącą przez punkty B i D
6. Narysuj prostą n równoległą do m przechodzącą przez punkt C. Punkt przecięcia półprostej k z prostą n oznacz przez E

Na mocy twierdzenia Talesa $\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|XY|}{|XZ|}$

Definicja 2. *Niech dany będzie odcinek AB. Niech punkt $P \in AB$, oraz $|AP| > |PB|$ Mówimy, że punkt P dzieli odcinek AB w słotym stosunku, jeśli $\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|PB|}$. Liczbę $\varphi = \frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|PB|}$ nazwyamy złotą liczbą.*

Uwaga 3.
Niektóre źródła definiują złotą liczbę jako $\frac{1}{\varphi}$.

Zauważmy, że rzeczywiście można podzielić odcinek w takim stosunku. Niech $a = |AB|$, $x = |AP|$, wtedy $a - x = |PB|$.

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} &= \frac{x}{a-x} \\ x^2 + ax - a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Jedynym dodatnim rozwiązaniem tego równania jest $x = a\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Uwaga 4.
Niektóre własności liczby φ:

1. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343656\ldots$
2. φ jest jedyną dodatnią liczbą spełniajacą równanie $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$
3. Jeśli Φ_n jest ciągiem Fibonacciego to $\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = \varphi$

Konstrukcja 5.
Przykładowa konstrukcja odcinka podzielonego w złotym stosunku.

1. Narysuj prostą k i zaznacz na niej dowolny odcinek AB
2. Skonstruuj półprostą l prostopadłą do prostej k w punkcje A. Zaznacz punkt C leżący na półprostej l w odległości $\frac{1}{2}|AB|$ od punktu A.
3. Zaznacz na półprostej l punkt D leżący w odległości CB od punktu C

4. Zaznacz na półprostej l punkt E leżący w odległości AB od punktu D

Punkt D dzieli odcinek AE w złotym stosunku.

Uwaga 6.
Zauważmy, że korzystając z konstrukcji 1 można podzielić dowolny odcinek w złotym stosunku. Warto w tym miejscu wspomnieć o tzw. Ślimaku Teodorosa. Metoda ta pozwala skonstruować odcinek o długości $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$. Konstrukcja ta opiera się na prostym spostrzeżeniu, że przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego, równoramiennego o ramionach długości 1, ma długość $\sqrt{2}$, przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i $\sqrt{2}$ ma długość $\sqrt{3}$ itd. Opierając się na tej konstrukcji łatwo można skonstruować odcinek o długości $a + b\sqrt{n}, a, b \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 7. *Dwusieczna kąta wewnętrznego w dowolnym trójkącie dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do długości pozostałych boków.*

Dowód. Weźmy dowolny trójkąt ABC. Niech dwusieczna $\angle(CAB)$ przecina bok CB w punkcie P. Mamy pokazać, że

$$\frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|AB|}{|PB|}$$

Zauważmy, że trójkąty ACP oraz APB mają wspólną wysokość opuszczoną na bok CB. Zatem $\frac{P_{\triangle ACP}}{P_{\triangle APB}} = \frac{|CP|}{|PB|}$ Niech $\alpha := \angle(CAP)$. Wiemy, że:

$$\frac{|CP|}{|PB|} = \frac{P_{\triangle ACP}}{P_{\triangle APB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AP| \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AP| \cdot \sin\alpha} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Stąd:

$$\frac{|AC|}{|CP|} = \frac{|AB|}{|PB|}$$

□

Twierdzenie 8. *Stosunek długości promienia okręgu opisanego na 10-kącie foremnym do długości boku tego wielokąta jest równy φ.*

Uwaga 9.
Jeśli przyjmiemy, że promień okręgu ma długość 1, bo bok 10-kąta foremnego ma długość $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Konstrukcja 10.
Przykładowa konstrukcja 10-kąta foremnego.

1. Narysuj dowolną prostą k, zaznacz na niej dowolny punkt O, narysuj okrąg o środku w punkcje O i zaznacz punkty A, B przecięcia okręgu z prostą k.

2. Zaznacz kąt $\angle BOD = 60°$. Zaznacz odcinek OD.

3. Narysuj prostą l prostopadłą do k, przechodzącą przez punkt O. Zaznacz punkt przecięcia prostej l z okręgiem, oznacz go jako E.

4. Narysuj z punktu A łuk o długości $|AE|$. Punkt przecięcia tego łuku z odcinkiem OD oznacz przez F.

Odcinek OF odpowiada długości boku 10-kąta foremnego.

Uwaga 11.
Kilka uwag ułatwiających konstrukcję 5-kąta foremnego:

1. $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
2. $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
3. długość boku 5-kąta foremnego wpisanego w okrąg o długości 1 wynosi $\frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{2}$

Konstrukcja 12.
Przykładowa konstrukcja 5-kąta foremnego:

1. Narysuj okrąg o środku w punkcje O, zaznacz jego średnicę AB oraz narysuj promień OD prostopadły do AB.
2. Wyznacz połowę odcinka AO, oznacz ją przez punkt E.
3. Z punktu E narysuj łuk o długości ED. Oznacz punkt przecięcia tego łuku z promieniem OB przez C.
4. Odcinek DC odpowiada długości boku 5-kąta foremnego.

Twierdzenie 13. *Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ istnieją takie $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, że $NWD\,(a, b) = \alpha a + \beta b$*

Dowód. Niech $a > b > 0$. Przyjmijmy, że $a_1 = a$ oraz $b_1 = b$. Wówczas:

$$\begin{aligned}
a_1 &= q_1 a_2 + a_3 \\
a_2 &= q_2 a_3 + a_4 \\
&\vdots \\
a_{s-3} &= q_{s-3} a_{s-2} + a_{s-1} \\
a_{s-2} &= q_{s-2} a_{s-1} + a_s \\
a_{s-1} &= q_{s-1} a_s
\end{aligned}$$

Wiemy, że NWD $(a, b) = a_s$. Zauważy, że na podstawie przedostatniego równania możemy zapisać a_s jako $a_s = a_{s-2} - q_{s-2} a_{s-1}$, dalej $a_{s-1} = a_{s-3} - q_{s-3} a_{s-2}$ Więc $a_s = (1 + q_{s-2} q_{s-3}) a_{s-2} - q_{s-2} a_{s-3}$. Dalej postępujemy analogicznie. $\square$

Przykład 14.
Przykłady zastosowania powyższego twierdzenia:

1. Wyznaczmy NWD $(126, 52)$

$$\begin{array}{rcll}
126 &=& 2 \cdot 52 + 22 & \rightarrow \\
52 &=& 2 \cdot 22 + 8 & \rightarrow \\
22 &=& 2 \cdot 8 + 6 & \rightarrow \\
8 &=& 6 + 2 & \rightarrow \\
6 &=& 3 \cdot 2 & \rightarrow
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
22 &=& 126 - 2 \cdot 52 \\
8 &=& 52 - 2 \cdot 22 \\
6 &=& 22 - 2 \cdot 8 \\
2 &=& 8 - 6 \\
\text{NWD}\,(126, 52) &=& 2
\end{array}$$

Czyli NWD $(126, 52) = 2$. Zapiszmy teraz 2 jako kombinację liniową 126 i 52.

$$\begin{aligned}
2 &= 8 - 6 \\
2 &= -22 + 3 \cdot 8 \\
2 &= 3 \cdot 52 - 7 \cdot 22 \\
2 &= -7 \cdot 126 + 17 \cdot 52
\end{aligned}$$

2. Wyznaczymy taką liczbę a, że $a \cdot 5 = 1 (\text{mod } 17)$. Wiemy, że $\text{NWD}\,(17, 5) = 1$. Wiemy, że istnieją takie liczby α i β, że $\alpha \cdot 5 + \beta \cdot 17 = 1$. Zauważmy, że $\alpha \cdot 5 + \beta \cdot 17 = \alpha \cdot 5 = 1 (\text{mod } 17)$. Czyli szukaną liczbą a jest α które umiemy znaleźć.

$$\begin{array}{rcll} 17 & = & 3 \cdot 5 + 2 & \rightarrow \\ 5 & = & 2 \cdot 2 + 1 & \rightarrow \\ 2 & = & 2 \cdot 1 & \rightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2 & = & 17 - 3 \cdot 5 \\ 1 & = & 5 - 2 \cdot 2 \\ \text{NWD}\,(17, 5) & = & 1 \end{array}$$

Wyznaczmy α i β:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 5 - 2 \cdot 2 \\ 1 & = & -2 \cdot 17 + 7 \cdot 5 \end{array}$$

Zatem $7 \cdot 5 = 1 (\text{mod } 17)$

Twierdzenie 15. *n-kąt foremny jest konstruowalny wtedy i tylko wtedy kiedy jest konstruowalny $2n$-kąt foremny.*

Twierdzenie 16. *Jeśli m i n -kąt foremny są konstruowalne, oraz $NWD\,(m, n) = 1$ to mn-kąt foremny jest konstruowalny.*

Dowód. Na mocy twierdzenia 13 istnieją takie liczby $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, że $\alpha m + \beta n = 1$. Stąd mamy, że:

$$\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} = \frac{1}{mn}$$

Skoro umiemy skonstruować m oraz n kąt foremny to umiemy podzielić kąt pełny na odpowiednio m oraz n równych części. Umiemy też skonstruować katy odpowiednio $|\alpha|$ oraz $|\beta|$ razy większe. Wreszcie umiemy odjąc te kąty od siebie. □

Przykład 17.
Jak skonstruować 30-kąt foremny? Zauważmy, że $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Definicja 18. *Liczbami Fermata nazywamy liczby postaci $2^{2^n} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.*

Uwaga 19.
Jedyne znane liczby pierwsze Fermata:

$$\begin{array}{rcl} F_0 & = & 3 \\ F_1 & = & 5 \\ F_2 & = & 17 \\ F_3 & = & 257 \\ F_4 & = & 65537 \end{array}$$

Obecnie jest znana jedynia pełna faktoryzacja liczb F_5 do F_{11}. 1 sierpnia 2008 roku Payam Samidoost odkrył, że F_{79221} jest podzielne przez $6089 \cdot 2^{79223} + 1$.

Twierdzenie 20 (Twierdzenie Gaussa-Wantzela)**.** *n-kąt foremny jest konstruowalny wtedy i tylko wtedy gdy $n = 2^k \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_l$ gdzie $k \in \mathbb{N}$ oraz $p_0, p_1, \ldots, p_l$ są parami różnymi liczbami pierwszymi Fermata.*

Konstrukcję 17-kąta foremnego podał w 1796 r. Gauss. Konstrukcję 257-kąta formnego podali Richelot i Schwendenwein około 1898 roku (niektóre źródła podają, że ta konstrukcja była znana już w 1836 roku). Johann Gustav Hermes w 1894 podał sposób konstrukcji 65537-kąta foremnego.

Uwaga 21.
Zauważmy, że jedynymi konstruowalnymi wielokątami o nieparzystej liczbie boków są te, których liczba boków jest dzielnikiem liczby $F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4 = 2^{32} - 1$. Takich wielokątów jest 32 (przyjmując, że „jednokąt" to punkt). Okazuje się, że jeśli zapiszemy te liczby w postaci binarnej to uzyskamy pierwsze 32 wiersze trójkąta Pascala modulo 2. Wygląda to tak:

1	1
3	11
5	101
15	1111
17	10001
51	110011
85	1010101
255	11111111
257	100000001
771	1100000011
1285	10100000101
3855	111100001111
4369	1000100010001
13107	11001100110011
21845	101010101010101
65535	1111111111111111
65537	10000000000000001
196611	110000000000000011
327685	1010000000000000101
983055	11110000000000001111
1114129	100010000000000010001
3342387	1100110000000000110011
5570645	10101010000000001010101
16711935	111111110000000011111111
16843009	1000000010000000100000001
50529027	11000000110000001100000011
84215045	101000001010000010100000101
252645135	1111000011110000111100001111
286331153	10001000100010001000100010001
858993459	110011001100110011001100110011
1431655765	1010101010101010101010101010101
4294967295	11111111111111111111111111111111

Twierdzenie 22 (Twierdzenie Mohra-Mascheroniego)**.** *Jeśli konstrukcja jest wykonalna za pomocą cyrkla i linijki to jest ona wykonalna za pomocą samego cyrkla (o ile ograniczymy się do samych punktów)*

Twierdzenie 23 (Twierdzenie Ponceleta-Steinera)**.** *Jeśli konstrukcja jest wykonalna za pomocą cyrkla i linijki to jest ona wykonalna za pomocą samej linijki, o ile mamy dany pewien okrąg ze środkiem.*