Definicja 1. Załóżmy, że $X \neq \emptyset$, $\rho\colon X \times X \longrightarrow [0, \infty)$. Funkcja ρ spełnia następujące warunki:

1. $$\bigwedge_{x,y \in X} (\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$$

2. $$\bigwedge_{x,y \in X} (\rho(x,y) = \rho(y,x))$$

3. $$\bigwedge_{x,y,z \in X} (\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y))$$

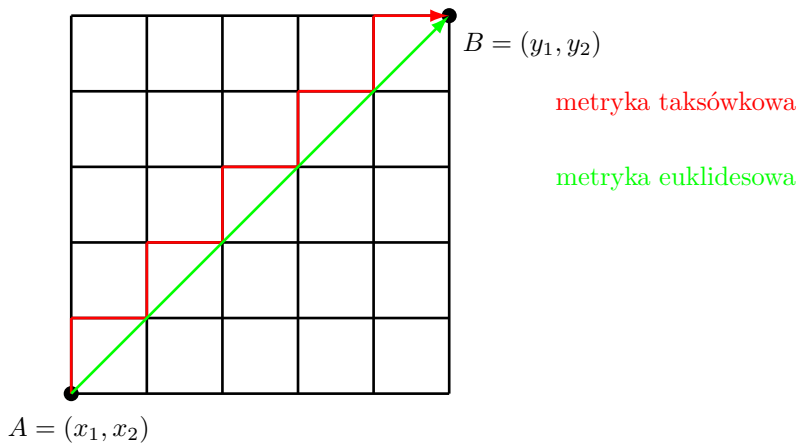
Wówczas funkcję ρ nazywamy *metryką* w X, a jej wartość na parze (x, y) nazywamy *odległością* punktów x i y. Parę uporządkowaną (X, ρ) nazywamy *przestrzenią metryczną*.

Przykłady przestrzeni metrycznych

1. Metryka euklidesowa - intuicyjna odległość punktów na prostej, na płaszczyźnie, w przestrzeni.

   - $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$
     $x, y \in \mathbb{R}$, $\rho_e\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$
     $\rho_e(x, y) := |x - y|$
     sprawdzenie warunków:
     Ustalmy dowolnie x, y, $z \in \mathbb{R}$
     (a) $(|x - y| = 0) \Leftrightarrow (x - y = 0) \Leftrightarrow (x = y)$
     (b) $\rho_e(x, y) = |x - y| = |y - x| = \rho_e(y, x)$
     (c) $\rho_e(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leqslant |x - z| + |z - y| = \rho_e(x, z) + \rho_e(z, y)$
   - $(\mathbb{R}^n, \rho_e)$
     $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
     $\rho_e := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$

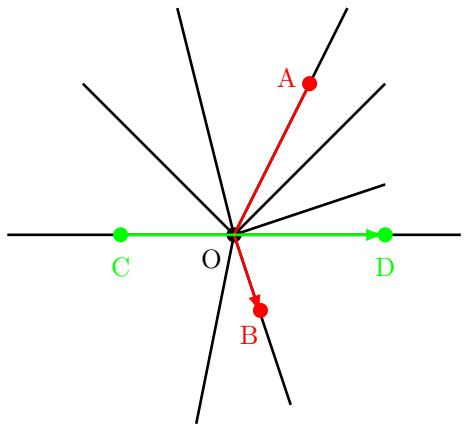
2. Metryka taksówkowa - wyobraźmy sobie, że w pewnym mieście ulice przecinają się pod kątem prostym tworząc szachownicę. Jadąc taksówką możemy się więc poruszać tylko w kierunkach północ, południe, wschód, zachód.



   - $(\mathbb{R}^2, \rho_t)$
     $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$
     $\rho_t \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$
     $\rho_t(x, y) := |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$
   - $(\mathbb{R}^n, \rho_t)$
     $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
     $\rho_t := |y_1 - x_1| + \ldots + |y_n - x_n|$

3. Metryka maksimum
   $(\mathbb{R}^n, \rho_m)$
   $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
   $\rho_m := \max(|y_1 - x_1|, \ldots, |y_n - x_n|)$

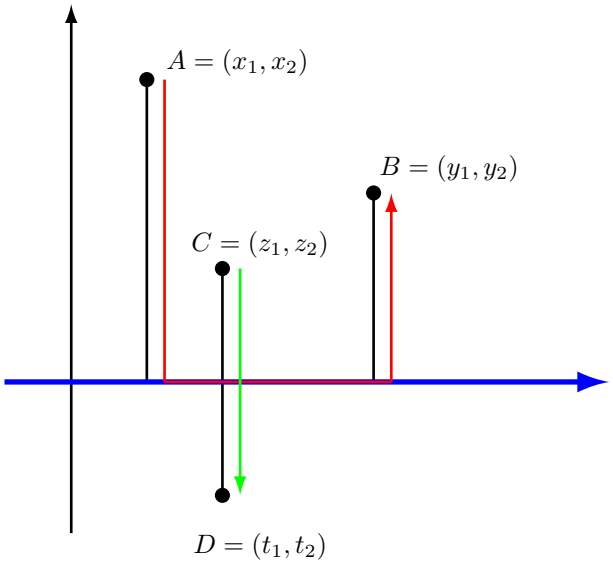
4. Metryka kolejowa - wyobraźmy sobie, że linie kolejowe wychodzą gwiaździście z jednego, centralnego punktu.



$(\mathbb{R}^2, \rho_k)$
$x, y \in \mathbb{R}^2$, $\theta = (0,0)$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$
$\rho_k \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$

$$\rho_k(x,y) := \begin{cases} \rho_e(x,y), & \text{gdy } x,\ y \text{ i } \theta \text{ leżą na jednej prostej;} \\ \rho_e(x,\theta) + \rho_e(\theta,y), & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

5. <u>Metryka rzeka</u> - wyobraźmy sobie, że środkiem niezwykle gęstego buszu płynie rzeka. Plemiona mieszkające w buszu wykarczowały najkrótszą możliwą drogę z osady do rzeki. Odwiedzając się wzajemnie korzystają zatem z tych dróg oraz rzeki.

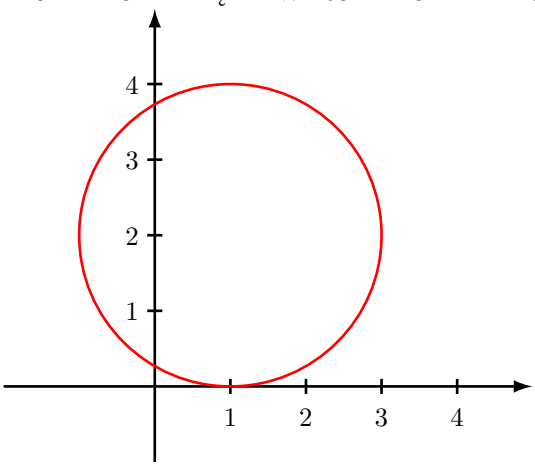


$(\mathbb{R}^2, \rho_r)$
$x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$
$\rho_r \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$
$$\rho_r(x, y) := \begin{cases} |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2|, & \text{gdy } x_1 \neq y_1; \\ |y_2 - x_2|, & \text{gdy} x_1 = y_1. \end{cases}$$

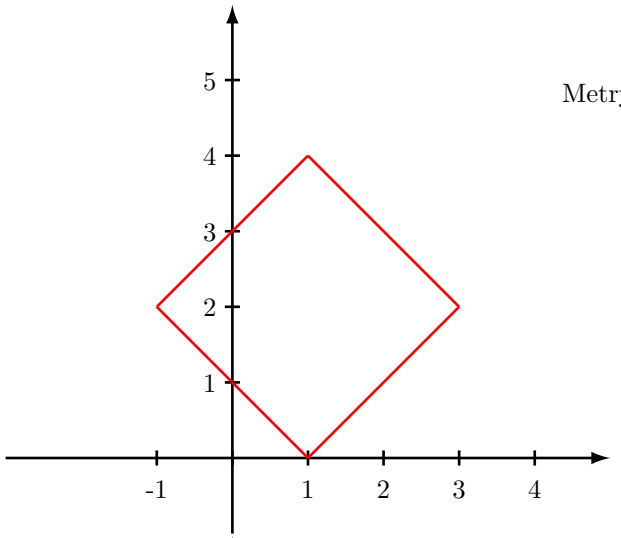
6. <u>Metryka dyskretna</u>
(X, ρ_d), $X \neq \emptyset$
$x, y \in X$
$\rho_d \colon X \times X \longrightarrow [0, \infty)$
$$\rho_d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{gdy} x \neq y; \\ 0, & \text{gdy} x = y. \end{cases}$$

Definicja 2. Załóżmy, że (X, ρ) jest przestrzenią metryczną, $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Wówczas zbiór:
$$K(x, \varepsilon) := \{y \in X \colon \rho(x, y) < \varepsilon\}$$
nazywamy *kulą otwartą* o środku w punkcie x i promieniu $\varepsilon > 0$. Zbiór:
$$\bar{K}(x, \varepsilon) := \{y \in X \colon \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\}$$
nazywamy *kulą domkniętą* o środku w punkcie x i promieniu $\varepsilon > 0$.

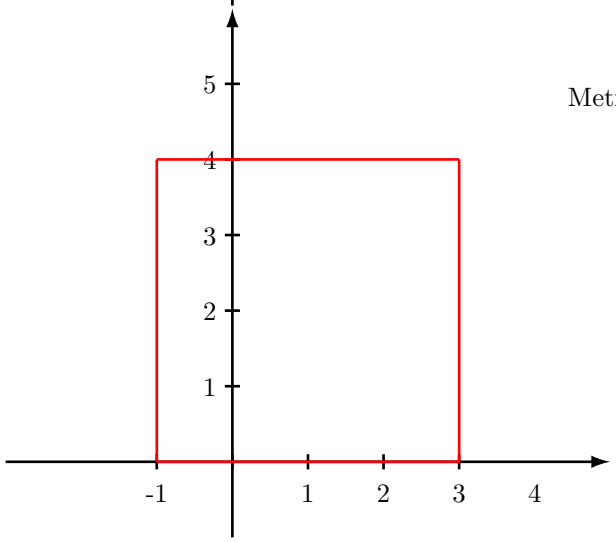
Kule domknięte w różnych metrykach



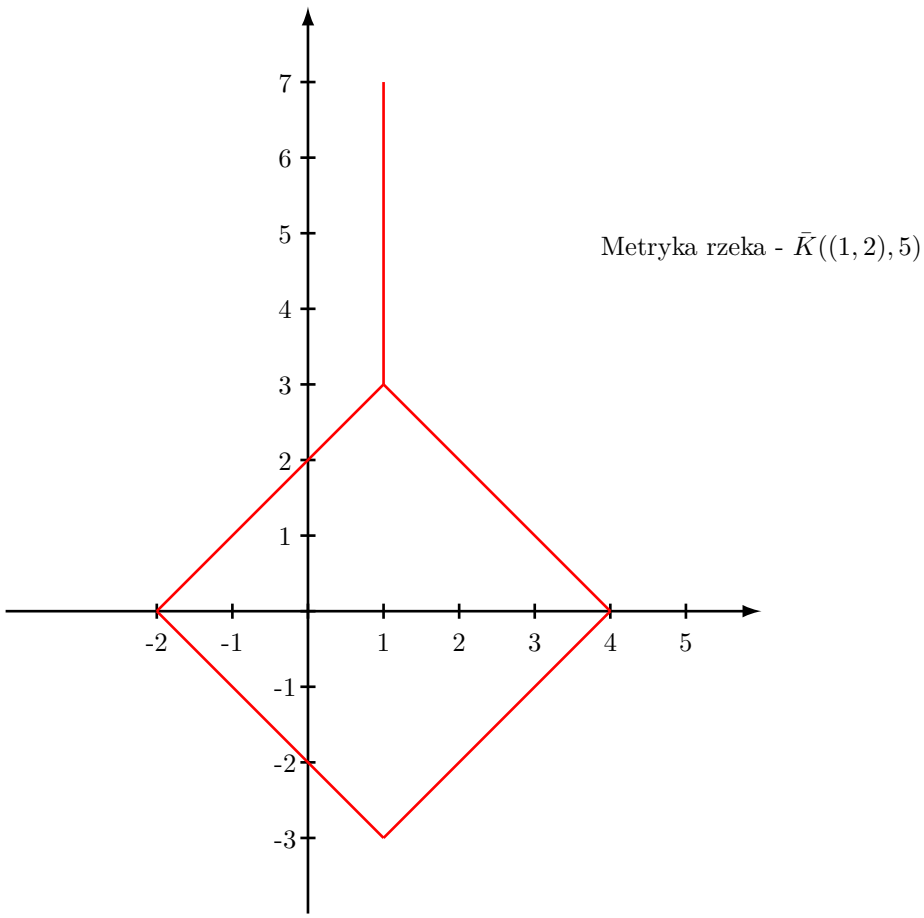
Metryka euklidesowa - $\bar{K}((1, 2), 2)$



Metryka taksówkowa - $\bar{K}((1,2),2)$



Metryka maksimum - $\bar{K}((1,2),2)$



Definicja 3. Załóżmy, że (X, ρ) jest przestrzenią metryczną,, $G \subseteq X$. Zbiór G nazywamy *otwartym* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x \in G} \bigvee_{\varepsilon > 0} K(x, \varepsilon) \subseteq G.$$

Twierdzenie 1. *W dowolnej przestrzeni metrycznej dowolna kula otwarta jest zbiorem otwartym.*

Dowód. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną, $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Oznaczmy $G := K(x, \varepsilon)$. Aby zbiór G był zbiorem otwartym, musi zachodzić poniższa implikacja:

$$y \in G = K(x, \varepsilon) \overset{?}{\Longrightarrow} \bigvee_{\eta > 0} K(y, \eta) \subseteq K(x, \varepsilon)$$

Ustalmy dowolnie $y \in G$. Niech $\eta := \varepsilon - \rho(x, y)$. Wtedy $\eta > 0$. Pokażemy, że $K(y, \eta) \subseteq K(x, \varepsilon)$:

$$(z \in K(y, \eta)) \Leftrightarrow (\rho(z, y) < \eta = \varepsilon - \rho(x, y)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\rho(z,x) \leqslant \rho(z,y) + \rho(y,x) < \varepsilon) \Rightarrow (z \in K(x,\varepsilon))$$

□

Wniosek 1. Zbiory $\emptyset$ oraz X są otwarte w każdej przestrzeni metrycznej.

Twierdzenie 2. *Niech (X,ρ) będzie przestrzenią metryczną i niech $\mathcal{G}(X)$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w X. Wówczas:*

1. $\emptyset,\ X \in \mathcal{G}(X)$
2. $\mathcal{R} \in \mathcal{G}(X) \Rightarrow \bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{G}(X)$
3. $(n \in \mathbb{N},\ G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}(X)) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{G}(X)$

Dowód. 1. Wniosek 1

2. $G = \bigcup \mathcal{R}$

$$(x \in G) \Rightarrow (\bigvee_{H \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{G}(X)} x \in H - otwarty) \Rightarrow (\bigvee_{\varepsilon > 0} K(x,\varepsilon) \subseteq H \subseteq \bigcup \mathcal{R})$$

3. Niech $G_1, \ldots, G_n$ będą zbiorami otwartymi, $G := \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Wówczas:

$$(x \in G) \Rightarrow (\bigwedge_{i \in \{1,\ldots,n\}} x \in G_i) \Rightarrow (\bigwedge_{i \in \{1,\ldots,n\}} \bigvee_{\varepsilon_i > 0} K(x,\varepsilon_i) \subseteq G)$$

Niech $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i\colon\ i = 1, \ldots, n\} > 0$. Mamy:

$$K(x,\varepsilon) \subseteq K(x,\varepsilon_i) \subseteq G_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Zatem

$$K(x,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i = G$$

□

Definicja 4. Niech $X \neq \emptyset$. Rodzinę $\mathcal{T}$ podzbiorów zbioru X nazywamy *topologią* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
2. jeśli $A, B \in \mathcal{T}$, to $A \cap B \in \mathcal{T}$,
3. jeśli $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$, to $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{T}$;

parę $(X, \mathcal{T})$ nazywamy *przestrzenią topologiczną*, elementy rodziny $\mathcal{T}$ nazywamy *zbiorami otwartymi*, a ich dopełnienia *zbiorami domkniętymi.*

Twierdzenie 3. *Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.*

Dowód. [1] Rozważmy zbiór $\mathbb{Z}$, dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z},\ b > 0$ zdefiniujmy:

$$N_{a,b} := \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Zauważmy, że każdy ze zbiorów $N_{a,b}$ jest nieskończonym w obie strony ciągiem arytmetycznym o różnicy równej b. Rozważmy zbiory $O \subseteq \mathbb{Z}$ następującej postaci:

$$O = \emptyset \tag{1}$$

lub

$$\bigwedge_{a \in O} \bigvee_{b > 0} N_{a,b} \subseteq O \tag{2}$$

Wówczas zbiory te tworzą topologię na $\mathbb{Z}$:

- $\emptyset$ jest postaci (1), a $\mathbb{Z}$ jest postaci (2).
- Jeżeli co najmniej jeden ze zbiorów O_1, O_2 jest pusty, to $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
  Załóżmy więc, że O_1, O_2 są postaci (2).
  Ustalmy dowolnie $a \in O_1 \cap O_2$.
  Wówczas $a \in O_1$ (zatem istnieje $b_1 > 0$ takie, że $N_{a,b_1} \subseteq O_1$) oraz $a \in O_2$ (zatem istnieje $b_2 > 0$ takie, że $N_{a,b_2} \subseteq O_2$).
  Wówczas $a \in N_{a,b_1 b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$.
- Jeżeli $\mathcal{R}$ jest rodziną zbiorów pustych, to oczywiście $\bigcup \mathcal{R} = \emptyset$.
  Załóżmy więc, że co najmniej jeden zbiór z rodziny $\mathcal{R}$ jest niepusty.
  Wówczas $(a \in \bigcup \mathcal{R}) \Leftrightarrow (\bigvee_{O \in \mathcal{R}} a \in O) \Rightarrow (\bigvee_{b>0} N_{a,b} \subseteq O \subseteq \bigcup \mathcal{R})$.

Zatem zbiory postaci (1) lub (2) są zbiorami otwartymi. Zauważmy, że:

1. Każdy niepusty zbiór otwarty jest nieskończony.
2. Każdy ze zbiorów $N_{a,b}$ jest zarówno zbiorem otwartym, jak i domkniętym.

Domkniętość zbioru $N_{a,b}$ wynika z faktu, że:

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}.$$

Zatem $N_{a,b}$ jest domknięty jako dopełnienie zbioru otwartego.
Oznaczmy zbiór wszystkich liczb pierwszych symbolem $\mathbb{P}$. Każda liczba $n \neq -1, 1$ ma jakiś dzielnik pierwszy p, zatem należy do zbioru $N_{0,p}$. Otrzymujemy więc:

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}.$$

Gdyby zbiór $\mathbb{P}$ był skończony, to suma $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ byłaby sumą skończenie wielu zbiorów domkniętych (na podstawie faktu 2.). Wtedy zbiór $\{-1, 1\}$ byłby otwarty. Sprzeczność z faktem 1. $\square$

[1] M. Aigner, G.M. Ziegler *Dowody z Księgi* PWN, Warszawa 2002