Uniwersytet Śląski
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

Wstęp do teorii gier

Autor: Mateusz Szymański

21 grudnia 2012

Spis treści

1 Co to jest gra?

Każdy z nas wie i czuje, czym jest **gra** i na czym ona polega – to pojęcie jest szeroko używane w różnych kontekstach. Zapewne jednak ciężko byłoby nam z miejsca podać w miarę możliwości precyzyjną definicję tego słowa. Posiłkując się słownikiem [1]:

Definicja

Gra – zabawa towarzyska prowadzona według pewnych zasad.

Wiemy, że w matematyce i innych naukach ścisłych, potrzebna będzie nam nieco bardziej precyzyjna definicja, byśmy mogli ustalić przedmiot naszych badań. Salen i Zimmerman zdefiniowali grę w sposób następujący[1]:

Definicja

Gra jest systemem, w którym gracze zaangażowani są w sztuczny konflikt, zdefiniowany za pomocą zasad, którego rezultatem jest pewien mierzalny wynik tejże gry.

Wciąż jednak nie jest to definicja ścisła, która pozwoliłaby **matematycznie** opisać tenże obiekt – żadne z użytych pojęć nie jest terminem matematycznym. Formalnie gra jest pewną uporządkowaną strukturą $\big(\Pi, (A_k)_{k\in\Pi}, (u_k)_{k\in\Pi}\big)$, złożoną z:

- zbioru graczy Π, np. $\Pi = \{P_1, P_2, \ldots\}$, co najmniej dwuelementowego,
- zbioru (co najmniej jednoelementowego) możliwych decyzji (akcji) dla każdego gracza S_k, $k \in \Pi$; zbiór reguł będziemy oznaczać jako $S = (S_k)_{k\in\Pi}$, zwanych dalej strategiami,
- funkcji wypłat gracza $k \in \Pi$ (funkcji użyteczności) $u_k : S \to \mathbb{R}$.

Tak rozumiana gra często odbiega od jej potocznie rozumianego odpowiednika – zauważmy, że konflikt międzyludzki pasuje pod tę definicję: mamy dwóch graczy, pewien zbiór możliwych decyzji w obrębie tej gry i jej rezultat.
Umownie za początek teorii gier jako nauki uznaje się okres międzywojenny i pierwsze badania Johna von Neumanna i ekonomisty Oskara Morgensterna[2]. Teoria gier znalazła zastosowanie m.in. w ekonomii, naukach społecznych, biologii czy informatyce. Powszcchnie nieporozumienie, które polega na utożsamianiu teorii gier jedynie z dziedziną zajmującą się badaniem gier „rozrywkowych” najprawdopodobniej wynika z tego, iż zachowana jest terminologia „zwykłych” gier, np. „gracz”, „strategia”, „wygrana” itd.

2 Podział gier

Gry mogą być kategoryzowane według przeróżnych kryteriów, np.:

- ilości graczy,
  - dwuosobowe (zwane czasami konfliktowymi),
  - wieloosobowe (skończenie/przeliczanie/nieprzeliczalnie),
- czasu gry,
  - czasu rzeczywistego,
  - turowego (o pewnej wydzielonej jednostce „czasu”),
- wiedzy gracza,
  - pełnej (kompletnej; gracz wie wszystko na temat stanu aktualnego gry),
  - niepełnej (niekompletnej),
- stałości zasad,
  - o stałych zasadach,
  - o zmiennych zasadach (gry ewolucyjne),

[1] W oryginale: „A game is a system in which players engage in an artificial conflict, defined by rules, that results in a quantifiable outcome”; patrz [2].

[2] Dokładniej *Theory of Games and Economic Behavior* (1944).

- ilości etapów gry,
  - strategicznej (gdy każdy z graczy podejmuje decyzję jednocześnie),
  - ekstensywnej (gdy gracze podejmują swoje decyzje sekwencyjnie, korzystając z wiedzy na temat stanu gry w poprzednich turach),
- możliwości kooperacji między graczami,
- charakteru gry,
  - losowe/bez elementu losowego,
  - o sumie zerowej (tj. każdy gracz dostaje dokładnie tyle, ile reszta w sumie musi oddać),
  - skończej/nieskończonej ilości możliwych strategii,
  - sprawiedliwe/niesprawiedliwe[3].

To drzewko podziału można oczywiście rozszerzyć. Niektóre z zależności wynikają z innych typów cech, np. każda gra jednoetapowa wymaga od graczy podjęcia decyzji jednocześnie, natomiast gry czasu rzeczywistego wykluczają skończoną ilość strategii.

Przykład. Spróbujemy, posługując się powyższą listą, skategoryzować niektóre popularną grę: **szachy**. Jest to gra:

- dwuosobowa,
- turowa,
- o wiedzy gracza kompletnej,
- o stałych zasadach,
- ekstensywna,
- bez możliwości kooperacji między graczami
- charakteru gry
- bez elementu losowego,
- o sumie zerowej (jeżeli przyjąć, że wygrana to 1, przegrana 0 i remis $\frac{1}{2}$, to zawsze suma wyników niezależnie od rezultatu jest 1),

Na obecną chwilę nie jest możliwe jednoznaczne stwierdzenie, czy szachy są grą sprawiedliwą – zdania są podzielone.

3 Podstawowe założenia i pojęcia

Podstawowym założeniem teorii gier jest, że gracze **działają racjonalnie**, tj. dążą do zmaksymalizowania własnego zysku i zminimalizowania strat. Nie ma sensu rozpatrywać uczestników rozgrywki, którzy dążą do własnej przegranej. Nie będziemy także rozważać sytuacji, w której gracze są zawistni, tj. zależy im także na zmniejszeniu wypłat innych graczy. Dodatkowo będziemy zakładać, że **działania graczy wpływają na nie tylko własny stan**, tj. wchodzą w interakcję z innymi i gry nie można sprowadzić do wielu rozłącznych[4]. Będziemy także rozważać tylko te gry, w których gracz ma jakikolwiek wybór (formalnie: zbiór możliwych strategii każdego gracza jest co najmniej dwuelementowy). Kolejne założenie będzie dotyczyć faktu, że każdy gracz będzie mógł podejmować decyzje **tylko i wyłącznie** zgodne z wcześniej ustalonymi regułami. Możemy oczywiście próbować grać w szachy z gołębiem, ten z kolei przewróci figury i będzie cieszył się ze zwycięstwa – jednakże nie jest to przedmiotem rozważań w teorii gier.

Definicja

Wypłatą nazywamy pewną wymierną korzyść, najczęściej zapisywanej umownie jako jakąś liczbę, która określa stan gracza po ukończeniu gry. W rzeczywistości wypłatą mogą być pieniądze, żetony, punkty, terytoria, a nawet satysfakcja, jeżeli tylko potrafimy przypisać jej wymierną wartość. Wypłaty mogą być także ujemne: gdy gracz w wyniku swoich działań jest zmuszony oddać coś Wygodną formą zapisu możliwych rezultatów w grach dwuosobowych jest tzw. **macierz wypłat**, która zawiera informacje o korzyściach graczy w zależności od podjętej strategii.

[3] Intuicyjna definicja gry sprawiedliwej jest dosyć jasna, natomiast formalna definicja zostane przedstawiona w dalszej części.

[4] Gry będziemy uważać za rozłączne, jeżeli da się wydzielić taki podzbiór graczy, że dowolna akcja ze zbioru możliwych strategii tych graczy nie wpływa na stan reszty graczy.

Uwaga

Wypłatę w grze o tych samych regułalch możemy liczyć na różne sposoby. Ten sposób będzie determinować, jakie działania będą opłacalne, a jakie nie. Nic nie stoi na przeszkodzie, żeby wypłatę określić jako to, co potocznie rozumiane jest jako strata. Wtedy działanie racjonalne w tej grze będzie tym, co zdroworozsądkowo uważamy za po prostu głupie (np. pozbyć się wszystkich pieniędzy).

Przykład. Rozważmy prostą grę o sumie zerowej, gdzie A_1, A_2 są strategiami gracza A, a B_1, B_2 strategiami gracza B:

	A_1	A_2
B_1	$(4, -4)$	$(-3, 3)$
B_2	$(-2, 2)$	$(1, -1)$

Tabela 1: Macierz wypłat prostej gry o sumie zerowej.

Widać, że gra jest faktycznie grą o sumie zerowej. (a, b) będziemy interpretować jako zysk a gracza A i zysk b gracza B. Jeżeli wartość jest ujemna, to gracz jest stratny. W grach o sumie zerowej możemy powyższy zapis uprościć, przyjmując zasadę, że będziemy zapisywać tylko rezultat dla gracza A (wartość dla B będzie oczywiście wartością przeciwną):

	A_1	A_2
B_1	4	-3
B_2	-2	1

Tabela 2: Macierz wypłat w postaci uproszczenej.

Zauważmy, że taka postać definiuje jednoznacznie grę. Tabela ta zawiera wszystkie możliwe rezultaty dla wszystkich graczy, a więc i wszystkie możliwe strategie. Możemy z niej odczytać wartości $\big(\Pi, (A_k)_{k\in\Pi}, (u_k)_{k\in\Pi}\big)$:

- $\Pi = \{A, B\}$,
- $S_A = \{A_1, A_2\}$, $S_B = \{B_1, B_2\}$,
- $u(A_1, B_1) = (4, -4)$, $u(A_2, B_1) = (-3, 3)$, $u(A_2, B_1) = (4, -4)$, $u(A_2, B_2) = (1, -1)$.

Jak widzimy, gry o sumie zerowej są bardzo łatwe do przedstawienia za pomocą macierzy wypłat. Nie musimy nawet słownie dookreślać reguł – każdy element z definicji gry został wyznaczony.

Gry nie muszą być oczywiście o sumie zerowej. Najlepszym przykładem prostej gry konfliktowej o sumie niezerowej jest **dylemat więźnia**.

Gra (Dylemat więźnia)**.**

Gra

Dwóch ludzi, A i B, popełniło przestępstwo, lecz brak na to ewidentnych dowodów. Policja umieściła podejrzanych w dwóch osobnych celach. Ponieważ nie ma dowodów popełnienia przez nich przestępstwa, nie można im udowodnić winy, stąd teżo policja stara się nakłonić ich do zeznań przeciwko sobie. Każdemu z więźniów dano dwie możliwości: mogą się albo przyznać do winy, albo zaprzeczyć. Jeśli więzień A się przyzna, a B zaprzeczy, to więzień B uniknie kary, a A otrzyma pełny wyrok (przyjmijmy: 10 lat) oraz odwrotnie, jeżeli B się przyzna, a A zaprzeczy, to B otrzyma 10 lat odsiadki. Jeżeli obaj się przyznają, to zarówno A, jak i B usłyszą wyrok 5. Natomiast jeżeli obydwaj zaprzeczą oskarżeniom, to nie będzie dowodów na ich przestępstwo i każdy z nich dostanie jedynie rok za ucieczkę przed policją.

Jeżeli przyjmiemy, że graczom zależy tylko na zmniejszeniu własnego wyroku (nie obchodzi ich los drugiej osoby), to spełnią założenia przytoczone uprzednio. Oznaczmy Z jako strategię „zeznawaj”, M jako „milcz” i utwórzmy macierz wypłat:
Zauważmy, że gra nie tylko nie jest grą o sumie zerowej, lecz każda z ewentualności pociąga za sobą niedodatnią wypłatę. Każdy z gracz dąży zatem do zminimalizowania strat. Widzimy też, że jeżeli A

	A_Z	A_M
B_Z	$(-5,-5)$	$(-10,0)$
B_M	$(0,-10)$	$(-1,-1)$

Tabela 3: Macierz wypłat w klasycznym dylemacie więźnia.

zdecyduje się milczeć, to niezależnie od decyzji B, wyjdzie gorzej niż gdyby zeznawał: $-5 > -10$, $0 > -1$. Istotnie, jeżeli B będzie zeznawać, to A dostanie 10 lat do odsiedzenia, jeżeli nie będzie zeznawać. Jeżeli jednak będzie zeznawać, ma szansę zmniejszyć wymiar kary do 5 lat. W tej sytuacji opłaca się zeznawać. W przypadku, gdy B będzie milczeć, milczenie skutkuje rocznym wyrokiem, natomiast zeznawanie zmniejsza ten wyrok całkowicie. A więc strategia „zeznawaj" daje lepsze rezultaty – taką strategię najlepszą ze wszystkich możliwych strategii niezależnie od decyzji oponenta będziemy nazywać **strategią dominującą**. Z drugiej jednak strony B stoi przed takim samym wyborem i też jest, zgodnie założeniem, graczem racjonalnym, więc także zdecyduje się współpracować. Ostatecznie oboje dostaną 5 lat, zamiast, wydawałoby się, najlepszego dla nich rozwiązania: milczenia obu stron. Problem polega jednak na tym, że gracze nie wiedzą, jak postąpi drugi więzień i to jest przyczyną ich wyborów.
Podobny problem widzimy niejednokrotnie w codziennych sytuacjach. Wyobraźmy sobie klasę w szkole, w której ktoś (nie wiadomo, kto) pod nieobecność wychowawcy poprzewracał wszystkie doniczki z kwiatami. Nauczycielka nie wie, kto to był, więc stawia ultimatum: jeżeli nikt się nie przyzna, to zastosuje odpowiedzialność zbiorową i wszyscy uczniowe dostaną naganę. Każde dziecko wolałoby, gdyby ktoś się przyznał, ale żadne nie chce się samo przyznać, bo tylko ono wtedy otrzyma karę.

Pytanie

Rozpatrzmy wariację tej gry pod tytułem „Dylemat zawistnych więźniów". Każdy ze złapanych będzie chciał **zwiększyć** karę drugiej osoby. Czy optymalna strategia się zmieni?

Zapiszmy to w postaci macierzy, zwróćmy uwagę, że czym innym jest teraz wypłata niż w poprzednim modelu:

	A_Z	A_M
B_Z	$(5,5)$	$(0,10)$
B_M	$(10,0)$	$(1,1)$

Tabela 4: Macierz wypłat w dylemacie zawistnego więźnia.

Widzimy, że zeznawanie zawsze zwiększa wyrok drugiej strony, a więc tutaj również jest to strategia dominująca. Strategią **zdominowaną**, tj. taką dla której istnieje co najmniej jedna strategia zawsze lepsza niezależnie od decyzji, jakie podejmuje rywal (lub rywale), jest milczenie. Podczas badania gier często nasze zadanie będzie się sprowadzać do odrzucenia wszystkich nieefektywnych strategii, które z punktu widzenia gracza są nieracjonalne. Wtedy zostanę tylko te strategie, które dają szanse na wymierny sukces.

4 Strategie

Powiedzieliśmy sobie, czym jest strategia dominująca i zdominowana. Przy badaniu niektórych gier okaże się, że jeden z graczy może mieć większą szansę na wygraną, a nawet możemy przewidzieć z góry wynik. Jeżell jeden z graczy może wygrać zawsze niezależenie od posunięć oponentów, to mówimy o **strategii wygrywającej**. Zauważmy, że strategia wygrywająca to strategia dominująca nad wszystkimi możliwymi strategiami rywali. Posłużmy się przykładem.

Gra (Gra w 33)**.**

Gra

Niech w grze będzie $n \in \mathbb{N}$ uczestników, gdzie $n \leqslant 10$. Gracz pierwszy podaję liczbę z zakresu $1-3$, natomiast każdy kolejny wybiera również liczbę z tego zakresu i dodaje ją do aktualnej liczby. Przegrywa ten gracz, który powie 33.

Jest to gra, która dla dwóch graczy ma ewidentną strategię wygrywającą. Prześledźmy tę grę „od końca". Jeżeli przegrany ma być zmuszony do powiedzenia 33, wygrywający musi w ostatnim ruchu wypowiedzieć 32. Musimy tak dobierać liczby, by wybór oponenta był bez znaczenia – a więc nie dopuścić do sytuacji, w której gracz przeciwny mówi 32. Zauważmy, że skoro gracz wybiera liczby z zakresu $1-3$, to jeżeli w poprzednim ruchu wybierzemy 28, to niezależnie od tego, co zrobi rywal, będziemy mogli w następnym ruchu dać 32. I dalej, jeżeli jeszcze wcześniej wygrywający wypowie 24, to będzie mieć pewność, że w następnym ruchu będzie mógł wybrać liczbę 28. Rozumując w ten sposób, możemy dojść do wniosku, że wygrywa ten gracz, który powie 4, więc nie będzie to gracz pierwszy (gracz drugi zawsze ma taką możliwość!).

Pytanie

Czy zmieniając 33 na inną liczbę oraz możliwy zakres liczb, możemy sprawić, by gra nie posiadała strategii wygrywającej?

Nie, może co najwyżej zmienić się gracz przegrywający – w zależności od tychże liczb uprzywilejowany może być albo gracz zaczynający, albo drugi w kolejności.
Powyższa gra jest przykładem **gry niesprawiedliwej**. W uproszczeniu gra jest sprawiedliwa, jeżeli nie istnieje strategia wygrywająca dla żadnego z graczy.

Uwaga

Grę sprawiedliwą definiuje się nieco inaczej: gra, w której wartość oczekiwana wypłat poszczególnych graczy jest ta sama. Gry z elementem losowym mogą być niesprawiedliwe, a przy tym nie posiadać strategii wygrywającej (z uwagi właśnie na tę losowość).

5 Punkt siodłowy i równowaga Nasha

Czasami się tak może zdarzyć, że podczas gry dobrzy gracze będą trzymać się zawsze jednej strategii, wtedy będziemy mówili o **strategii czystej**. Rozważmy pewną grę o sumie zerowej określoną następującą macierzą:

	A_1	A_2
B_1	7	5
B_2	3	1

Tabela 5: Pewna gra z punktem siodłowym.

Gracz A będzie chciał zyskać jak najwięcej, ale B będzie dążyć przy tym do zminimalizowania swoich strat (jest to wszak gra o sumie zerowej). Zatem przy każdej ze strategii A dopiszmy pod spodem najgorszy scenariusz dla A. To samo zróbmy dla B, wypiszmy po prawej stronie najgorszy dla niego scenariusz w zależności od strategii B:

	A_1	A_2	
B_1	7	5	7
B_2	3	1	3
	3	1	

Tabela 6: Pewna gra z punktem siodłowym z dopisanymi minimaksami.

Po prawej stronie wypisaliśmy maksima z wierszy, natomiast na dole minima z kolumn. Biorąc odpowiednio minimum i maksimum z tych wartości, otrzymujemy tzw. **maksimin** i **minimaks**. Jeżeli tylko te wartości są równe, to gra posiada punkt siodłowy. To znaczy tyle, że A powinien przyjąć strategię A_1, natomiast B_2. Jeżeli odejdą od tych strategii, mogą narazić się na straty (obranie A_2 może skutkować uzyskaniem wartości 1 zamiast 3). Punktów siodłowych może być więcej i tak samo się je znajduje dla tego typu gry nawet przy większej ilości strategii.

Pytanie

A co jeżeli takiego punktu nie ma?

Nie zawsze punkt siodłowy istnieje. Wtedy należy **mieszać strategie**. Pewnym naturalnym rozszerzeniem punktu siodłowego jest tzw. **równowaga Nasha**. Równowagę Nasha można przedstawić tak:

Gra

Będę grać najlepiej pod warunkiem, jeżeli robisz to, co robisz. Ty będziesz grać najlepiej, o ile ja będę robić to, co robię.

Każdy z graczy w równowadze Nasha nie powinien odstępować od swojej strategii. Jak znaleźć w prostych grach taką strategię? Rozważmy pewną grę i znajdźmy minimaks oraz maksimin:

	A_1	A_2	
B_1	-2	3	3
B_2	3	-4	3
	-2	-4	

Tabela 7: Gra bez punktu siodłowego.

Widzimy, że wyznaczone wartości się różnią i gra nie posiada punktu siodłowego. Przyjmijmy, że gracz A będzie mieszać strategie – z pewnym prawdopodobieństwem p wybierze A_1, natomiast oczywiście A_2 będzie przyporządkowane prawdopodobieństwu $1-p$. Wtedy możemy wyznaczyć średnią wartość, którą uzyska gracz A, gdy gracz B zdecyduje się na strategię B_1:

$$p \cdot (-2) + (1-p) \cdot 3$$

natomiast dla strategii B_2 średni zysk wynosi:

$$p \cdot 3 + (1-p) \cdot (-4)$$

Szukając p spełniającego:

$$p \cdot 3 + (1-p) \cdot (-4) = p \cdot (-2) + (1-p) \cdot 3$$

łatwo wyznaczamy, że $p = \frac{7}{12}$. Niezależnie od wyboru przeciwnika, gdy będzie z takim prawdopodobieństwem wybierać strategie, zawsze uzyskamy ten sam wynik. Jest to właśnie szukana równowaga Nasha w strategii mieszanej.

Uwaga

Każda skończona gra ma przynajmniej jedną równowagę Nasha, niekoniecznie w strategiach czystych

Przejdźmy do gry, która nieco odbiega od naszych intuicji.

Gra (Aukcja o dolara)**.**

Za *Wiki*:

Gra

Sprzedawca otwiera aukcję, której przedmiotem jest banknot jednodolarowy. Zasada aukcji jest następująca: dolar zostanie sprzedany temu, kto zaoferuje najwięcej, ale ten kto będzie drugi w kolejności, też musi zapłacić swoją stawkę i nie dostanie nic w zamian. W aukcji może wziąć udział dowolnie wielu graczy. Aukcja zaczyna się z ceną wywoławczą równą 1 centowi.

Gra wydaje się kusząca. Biorąc udział w grze, możemy zacząć od niskiej kwoty i w najgorszym wypadku stracimy tylko to, co postawilśmy. W najlepszym – zyskamy co najmniej 98 centów. Przypuścmy, że mamy dwóch graczy, którzy są zdeterminowani i spełniają założenia omówione poprzednio. Pierwszy gracz przebija cenę wyjściową i stawia 2 centy. Drugi uczestnik aukcji bierze udział i przebija kwotą opiewającą na 3 centy. Jednakże, pierwszy gracz jest graczem dążącym do maksymalizacji zysków. Jeżeli się wycofa, straci postawione pieniądze, a więc postąpi **nieracjonalnie** z punktu widzenia gry. Zatem przebija ofertę i ustanawia 4 centy. Z drugiej jednak strony drugi gracz musi podwyższyć poprzeczkę –

jest graczem zdeterminowanym i racjonalnym, więc nie pozwoli sobie na stratę. Gra się toczy dalej do momentu, w którym cena aukcyjna wynosi 99 centów. Ale gracz postawiony przed taką sytuacją ma do wyboru albo stracić 98 centów, albo podbić stawkę i stracić 0. Z kolei, jeżeli cena zostanie podbita, to drugi gracz będzie postawiony przed takim samym wyborem – a więc po raz kolejny przebije aktualną cenę dolara. I tak do momentu, aż któryś z graczy zbankrutuje.

Pytanie

Założyliśmy, że gracze są zdeterminowani i racjonalni, ale patrząc zdroworozsądkowo, jeden z graczy powinien ustąpić w pewnym momencie, gdyż od pewnego momentu gra staje się nieopłacalna niezależnie od przyjętej dalszej strategii. Gdzie twki, o ile twki, błąd w naszym rozumowaniu?

Przede wszystkim założyliśmy, że będziemy obliczać nasz zysk w sposób bezwzględny, bezpośrednio jako saldo po wzięciu udziału w grze. Dzięki temu nasz zysk i stratę zawsze obliczamy tak samo – bezwzględnie. Z punktu widzenia naszego modelu, **nie ma tu żadnego błędu w rozumowaniu** – można co najwyżej powiedzieć, że sposób jest nieadekwatny do rzeczywistego działania ludzi. Zauważmy, że w tej grze wartość przedmiotu aukcji nie ma znaczenia – o ile tylko jest większa niż 2 dolary, to jej przebieg będzie identyczny. Natomiast w świecie rzeczywistym możemy się spodziewać innych wyników: w grze o milion (zakłamy, że uczestnicy taką kwotą nie dysponują) na tych samych zasadach najprawdopodobniej wygra ten gracz, który ma najwięcej pieniędzy i będzie w stanie poprawnie wykalkulować zasobność portfeli swoich oponentów.
Zauważmy też, że jeżeli gra rozpoczyna się od 1 centa, to widać, iż **żaden gracz nie może osiągnąć równowagi Nasha**. Stawka będzie zawsze podbijana do momentu, aż któryś będzie niewypłacalny (przyjmijmy, że gracze mają więcej niż jeden dolar). Grę możemy „poprawić”, uwzględniając przy wyznaczaniu funkcji wypłaty prawdopodobieństwa tego, że inni gracze przebiją stawkę.

Pytanie

Zatem jakie jest rozwiązanie i kto jest zwycięzcą w tej grze?

Rozwiązaniem problemu jest: **nie brać udziału w grze!** Jedynym zwycięzcą jest zawsze organizator, o ile przystąpią co najmniej dwaj gracze równie zdeterminowani.
A teraz nieco o sprawiedliwości potoczie rozumianej. Garrett Hardin w 1968 roku opublikował pracę „The Tragedy of the Commons” [3] dotyczącą podziału dóbr wspólnych, w której rozważa pewien uproszczony model:

Gra

Niech w pewnej wiosce będzie 5 farmerów i niech każdy z nich ma 2 krowy. Rolnicy mogą wyprowadzać jedną, dwie krowy lub także pozostawić wszystkie u siebie. Niech wypłatą będzie ilość trawy, jaką krowy właściciela zjedzą ze wspólnego pastwiska. Oczywiste jest, że każdy z farmerów najchętniej wyprowadziłby wszystkie krowy, gdyż nie musiałby karmić ich własnymi zasobami. Jednakże to wspóllne pastwisko jest ograniczone i im więcej krów jest na nim, tym na każdą przypada mniej pożywienia. Przyjmijmy podstawowe założenia, że farmerzy i krowy są nierozróżnialne (czyli mają te same wymagania i oczekiwania w tej „grze”).

Będziemy chcieli utworzyć macierz wypłat. Możemy uprościć ją, wypisując tylko jednego farmera, gdyż możliwe strategie (i konsekwencje tychże) dla każdego są identyczne. Przyjmijmy dla uproszczenia rachunków, że jednostek trawy jest 20. Wtedy łatwo możemy przedstawić wszystkie opcje, wiedząc, że wszystkich krów jest 10[5]:
Zatem widzimy, iż sprawiedliwie i dobrze jest, gdy każdy z farmerów wyprowadza dokładnie jedną krowę, natomiast niewypasanie zwierząt w ogóle jest strategią calkowicie zdominowaną przez inne. Jednakże, jeżeli tylko jedna osoba wbrew niepisanej zasadzie wypuści dwie krowy, w sensie tej gry osiągnie zwycięstwo. Jeżeli zatem działa racjonalnie zgodnie z uprzednimi założeniami – zawsze. Zaznaczyliśmy, że rolnicy są „nierozróżnialni” i każdy z nich będzie dążył do maksymalizacji swoich zysków. Zatem każdy z nich powinien wedle tych ustaleń wyprowadzić dwie krowy, co będzie nieść ze sobą tragiczny skutek – każda z krów dostanie bardzo mało, bo tylko 4 jednostki pożywienia. Gdyby natomiast każdy z nich zgodził się wystawić tylko jedną krowę, byłaby to globalnie najkorzystniejsza dla wszystkich opcja – wszyscy

[5] Pomysł na tabelę wypłat zaczerpnięty z [4].

krowy		cudze								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
własne	1	11	10	9	8	**7**	6	5	4	3
	2	20	18	16	14	12	10	8	6	**4**

Tabela 8: Macierz wypłat w grze Hardina.

uzyskaliby 7 jednostek. Ale niesie to ze sobą ryzyko, że któryś się „wyłamie”, wypuszczając dwie krowy i, poprzez to, zyskując najwięcej.

Wniosek

Nie zawsze założenie o maksymalizacji zysków jest konieczne, a nawet właściwe.

Uwaga

Gra stanie się ciekawa, jeżeli zostawimy założenie o maksymalizacji zysków, ale graczom umożliwimi zawieranie umów między sobą. Czy wtedy optymalną strategią jest zawarcie sojuszu ze wszystkimi farmerami?

6 Zakończenie

To już koniec dosyć okrojonego wstępu do teorii gier. Temat oczywiście został jedynie naszkicowany i wiele rzeczy musiało zostać pominiętych. Zachęcam jednak wszystkich do samodzielnej lektury materiałów o teorii gier (przystępne wyjaśnienie tematu zawarte jest m.in. w [4] i [5]). Przede wszystkim polecam zanalizować niektóre popularne gry, jak np. grę w cykora.

Literatura

[1] `http://sjp.pwn.pl/slownik/2462662/gra`

[2] **Katie Salen, Eric Zimmerman**, *Rules of Play. Game Design Fundamentals.* Massachusetts: MIT Press 2004.

[3] **Garrett Hardin**, *The Tragedy of the Commons.* Science, New Series, Vol. 162, No. 3859. (Dec. 13, 1968), pp. 1243-1248.

[4] **Giaur, Tomasz Rostański, Marcinek Drozd**, *Teoria gier*, `http://www.knf.pw.edu.pl/projekty/wirtschaftsphysik/sources/doc04.pdf`

[5] **Ryszard Kostecki**, *Wprowadzenie do teorii gier*, `http://fuw.edu.pl/~kostecki/teoria_gier.pdf`