Spis treści

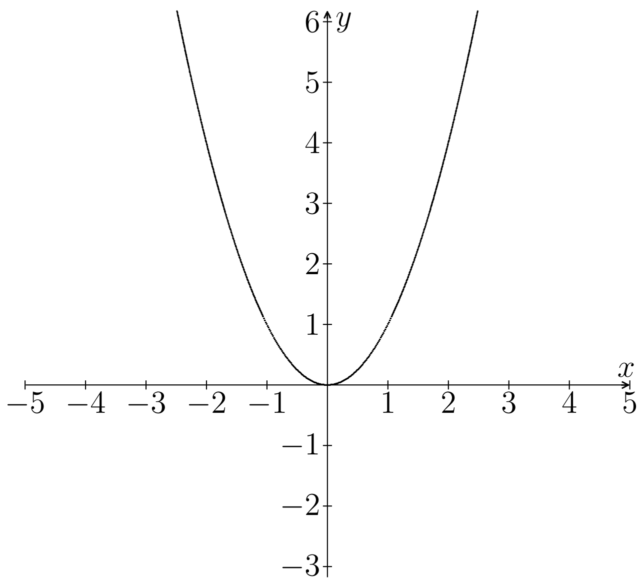
1. Badanie przebiegu zmienności funkcji

Stosunkowo łatwo jest narysować wykresy znanych funkcji, np. funkcji liniowej, kwadratowej, wielomianowej czy wykładniczej. Drogi Czytelniku! Jeżeli zastanawiałeś się kiedyś, jak szkicować wykresy nieco bardziej skomplikowanych funkcji i niech chcesz w tym celu używać wszechobecnych dziś komputerów albo po prostu akurat nie dysponujesz takim sprzętem (czy to w ogóle możliwe? :)), to ten rozdział może być dla Ciebie ostatnią (a właściwie równie dobrze pierwszą, drugą czy też n-tą, gdzie $n \in \mathbb{N}$) deską ratunku.

1.1. Co i jak, czyli trochę teorii

Oto szczegółowy plan ułatwiający badanie przebiegu zmienności funkcji:
1. Dziedzina i przeciwdziedzina funkcji
2. Własności geometryczne wykresu (parzystość, nieparzystość, miejsca zerowe, punkty przecięcia z osią OY, znak funkcji)
3. Granice funkcji na końcach przedziałów dziedziny
4. Wstępny szkic wykresu
5. Obliczenie pochodnej funkcji
6. Przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji
7. Przedziały wypukłości i punkty przegięcia
8. Asymptoty
9. Szkic wykresu

Przyjrzyjmy się teraz poszczególnym etapom sporządzania wykresu.
1. Wyznaczamy tu dziedzinę funkcji - zwracamy uwagę na miejsca zerowe mianownika, wyrażenia pod pierwiastkiem, dziedzinę logarytmu i inne ciekawe pułapki. Czasem warto się również dowiedzieć, jaki jest zbiór wartości funkcji.



Rysunek 1. Wykres funkcji $f(x) = x^2$

2. — Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *parzystą*, jeżeli

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} f(-x) = f(x)$$

Wykresy funkcji parzystych są więc symetryczne względem osi OY, np. $f(x) = x^2$, (rys. 1).

— Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *nieparzystą*, jeżeli

$$\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} f(-x) = -f(x)$$

Wykresy funkcji nieparzystych są więc symetryczne względem początku układu współrzędnych, np. $f(x) = x^3$, (rys. 2).

— Kolejnym ważnym punktem jest wyznaczenie miejsc zerowych, punktów przecięcia z osią OY oraz znaku funkcji, np. dla funkcji

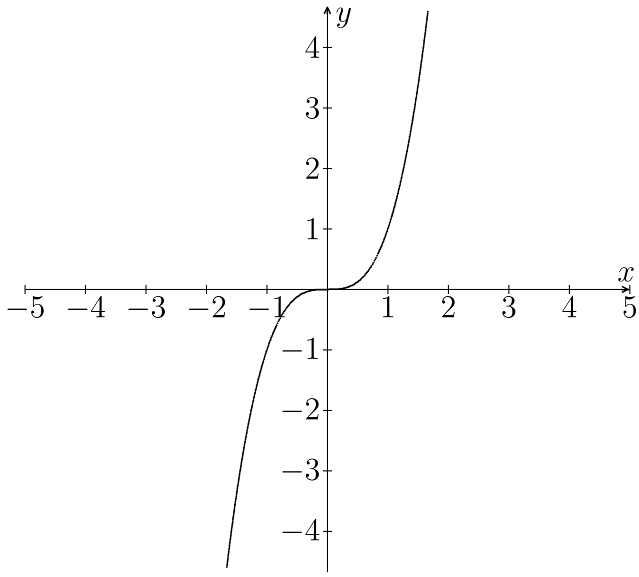
$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

miejscami zerowymi są $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, f przecina oś OY w punkcie $(0, 2)$,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2).$$

3. Obliczamy teraz granice na końcach przedziałów dziedziny, a więc także w $-\infty$, $+\infty$. Najczęściej pojawiające się granice to:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



Rysunek 2. Wykres funkcji $f(x) = x^3$

4. W tym momencie warto wstępnie naszkicować wykres, zaznaczając miejsca zerowe, punkt przecięcia z osią OY, obliczone już granice oraz przedziały, w których funkcja jest dodatnia.
5. Pochodna funkcji niezwykle ułatwia nam szkicowanie wykresu. Czym jest więc ta pochodna?
   Pochodną funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie x_0 nazywamy następującą granicę (o ile granica ta istnieje):

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

   W praktyce rzadko zdarza się obliczać pochodne funkcji korzystając bezpośrednio z definicji, dlatego poniżej zamieszczam najważniejsze wzory dotyczące pochodnych:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(\alpha f)' = \alpha \cdot f'$$
$$(f \cdot g)' = f'g + g'f$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$
$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(c)' = 0$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$

6. Dlaczego pochodna funkcji przydaje się przy rysowaniu wykresów funkcji? Otóż ma ona tę sympatyczną własność, że można za jej pomocą stosunkowo łatwo i bezboleśnie znaleźć punkty, w których funkcja przyjmuje lokalne ekstrema (a więc wartości największe i najmniejsze). Prawdziwe są następujące twierdzenia:
Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne i f jest w tym punkcie różniczkowalna, to*
$$f'(x_0) = 0.$$
Uwaga 1. Jeżeli funkcja f spełnia $f'(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$, to nie musi ona przyjmować w x_0 ekstremum.
Twierdzenie 2. *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w przedziale $[a, b]$. Wówczas f jest rosnąca w przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in [a, b]$. Podobnie, f jest malejąca w przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \leqslant 0$ dla każdego $x \in [a, b]$.*
Przykład 1. Rozważmy funkcję $f(x) = x^4 - 4x^3$. Funkcja ta jest różniczkowalna w $\mathbb{R}$. Obliczmy pochodną funkcji f:
$$f'(x) = (x^4 - 4x^3)' = (x^4)' - (4x^3)' = 4x^3 - 12x^2$$
$$(f'(x) = 0) \Leftrightarrow (4x^3 - 12x^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 3)$$
$$(f'(x) > 0) \Leftrightarrow (x \in (3, +\infty))$$
$$(f'(x) < 0) \Leftrightarrow (x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)).$$
Zbierzmy uzyskane dane w tabelce:

x	$(-\infty, 0)$	$\{0\}$	$(0, 3)$	$\{3\}$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

Wnioskujemy, że funkcja f jest funkcją malejącą w przedziale $(-\infty, 3)$, rosnącą w przedziale $(3, +\infty)$ i przyjmującą minimum lokalne w punkcie $x_0 = 3$.
7. Obliczając drugą pochodną (czyli pochodną pochodnej) jesteśmy w stanie stwierdzić, w których przedziałach funkcja jest wypukła oraz w których punktach ma punkty przegięcia.

Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 punkt przegięcia i f jest w tym punkcie dwukrotnie różniczkowalna, to*

$$f''(x_0) = 0.$$

Twierdzenie 4. *Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w przedziale $[a,b]$. Wówczas f jest wypukła w przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x)$ jest rosnąca w $[a,b]$. Podobnie, f jest wklęsła w przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x)$ jest malejąca w $[a,b]$.*

Wniosek 1. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w przedziale $[a,b]$. Wówczas f jest wypukła w przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in [a,b]$. Podobnie, f jest wklęsła w przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f''(x) \leqslant 0$ dla każdego $x \in [a,b]$.

Przykład 2. Rozważmy funkcję $f(x) = x^4 - 4x^3$ z poprzedniego przykładu. Mamy:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$
$$(f''(x) = 0) \Leftrightarrow (12x^2 - 24x = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 2)$$
$$(f''(x) > 0) \Leftrightarrow (x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty))$$
$$(f''(x) < 0) \Leftrightarrow (x \in (0, 2)).$$

x	$(-\infty,0)$	$\{0\}$	$(0,2)$	$\{2\}$	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	-	0	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	p.prz.	$\searrow$	p.prz	$\nearrow$

Wnioskujemy, że funkcja f jest funkcją wypukłą w przedziale $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ i wklęsłą w przedziale $(0, 2)$. f ma punkty przegięcia w $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

8. Asymptoty ukośne funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są postaci $y = ax + b$, gdzie

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax).$$

1.2. Przykłady

Przykład 3. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Naszkicuj wykres tej funkcji.

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. Obliczamy:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x)$$

Funkcja f jest więc nieparzysta (wystarczy rozpatrywać funkcję jedynie na półosi dodatniej, a następnie uzyskany wykres odbić symetrycznie względem początku układu współrzędnych). Zauważamy, że f nie ma miejsc zerowych oraz

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty), \quad f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0).$$

3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=+\infty$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$$

4.

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)'\cdot x-(x^2+1)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

5.

$$(f'(x)=0)\Leftrightarrow(x=1\vee x=-1)$$
$$(f'(x)>0)\Leftrightarrow(x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty))$$
$$(f'(x)<0)\Leftrightarrow(x\in(-1,1))$$

x	$(-\infty,-1)$	$\{-1\}$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$\{1\}$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$f(-1)=-2,\quad f(1)=2$$

f jest malejąca dla $x\in(-1,1)$, rosnąca dla $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, osiąga minimum lokalne w punkcie $x_1=1$, a maximum lokalne w punkcie $x_2=-1$.

6.

$$f''(x)=\frac{(x^2-1)'\cdot x^2-(x^2-1)\cdot(x^2)'}{x^4}=\frac{2x^3-2x^3+2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}(f''(x)\neq0)$$
$$(f''(x)>0)\Leftrightarrow(x\in(0,+\infty))$$
$$(f''(x)<0)\Leftrightarrow(x\in(-\infty,0))$$

f jest wypukła dla $x\in(0,+\infty)$, wklęsła dla $x\in(-\infty,0)$, nie ma punktów przegięcia.

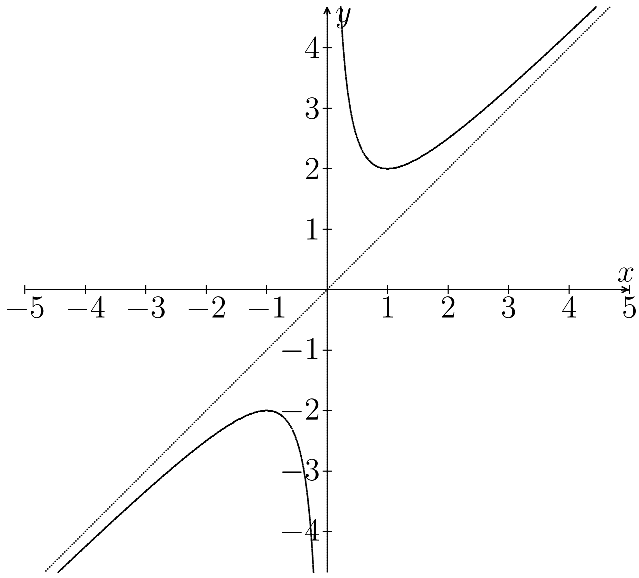
7.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Równanie asymptoty ukośnej to: $y=x$.
(patrz rys. 3)

Przykład 4. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x)=x+\sin x$. Naszkicuj wykres tej funkcji.

1. $D_f=\mathbb{R}$



Rysunek 3. Wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

2. Obliczamy:

$$f(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin x = -(x + \sin x) = -f(x)$$

Funkcja f jest więc nieparzysta (wystarczy rozpatrywać funkcję jedynie na półosi dodatniej, a następnie uzyskany wykres odbić symetrycznie względem początku układu współrzędnych).

$$(f(x) = 0) \Leftrightarrow (x + \sin x = 0) \Leftrightarrow (x = -\sin x) \Leftrightarrow (x = 0)$$
$$(f(x) > 0) \Leftrightarrow (x > -\sin x) \Leftrightarrow (x \in (0, +\infty)$$
$$(f(x) < 0) \Leftrightarrow (x < -\sin x) \Leftrightarrow (x \in (-\infty, 0)$$

Zauważmy także, że

$$x - 1 \leqslant x + \sin x \leqslant x + 1, \quad (\text{bo} - 1 \leqslant \sin x \leqslant 1).$$

3.
$$f'(x) = (x + \sin x)' = 1 + \cos x$$

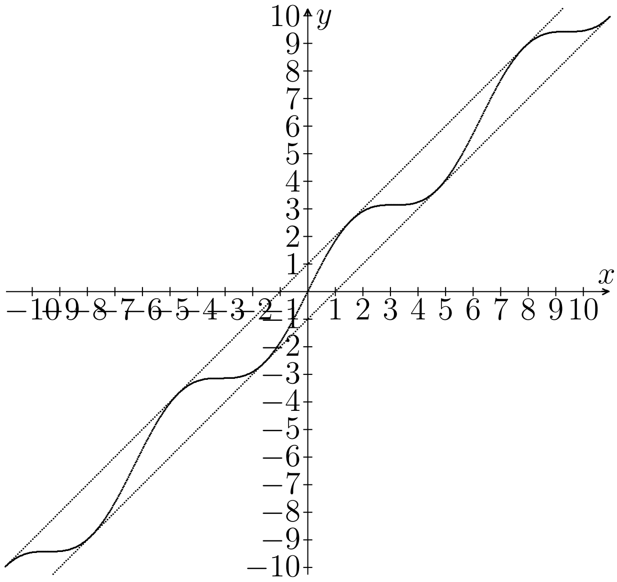
4.

$$(f'(x) = 0) \Leftrightarrow (\cos x = -1) \Leftrightarrow (x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z})$$
$$(f'(x) > 0) \Leftrightarrow (\cos x > -1) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\})$$

f jest rosnąca dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nie osiąga ekstremów lokalnych w żadnym punkcie.

5.

$$f''(x) = (1 + \cos x)' = -\sin x$$
$$(f''(x) = 0) \Leftrightarrow (-\sin x = 0) \Leftrightarrow (x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\})$$
$$(f''(x) > 0) \Leftrightarrow (-\sin x > 0) \Leftrightarrow (\sin x < 0) \Leftrightarrow (x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\})$$
$$(f''(x) < 0) \Leftrightarrow (-\sin x < 0) \Leftrightarrow (\sin x > 0) \Leftrightarrow (x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}\})$$



Rysunek 4. Wykres funkcji $f(x) = x + \sin x$

f jest wypukła dla $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$, wklęsła dla $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}\}$, punkty przegięcia są elementami zbioru $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
(patrz rys. 4)

1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zbadaj przebieg zmienności poniższych funkcji i naszkicuj ich wykresy.

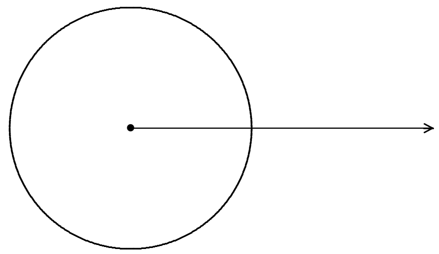
1. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
2. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$
3. $f(x) = e^{-x^2}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

2. O układzie biegunowym

Układem biegunowym nazywamy układ współrzędnych na płaszczyźnie wyznaczony przez pewien punkt O zwany *biegunem* oraz półprostą OS o początku w punkcie O zwaną *osią biegunową*. Krzywą w układzie biegunowym określamy za pomocą odległości danego punktu płaszczyzny od początku układu O (odległość tę oznaczać będziemy literą ϱ) oraz kąta zorientowanego, jaki tworzy promień wodzący z osią układu (kąt ten oznaczać będziemy literą t).

2.1. Jak to narysować?

Przykład 5. Spróbujmy zapisać "wzór" na okrąg używając współrzędnych biegunowych. Początek układu współrzędnych powinien być jednakowo od-



Rysunek 5. Okrąg w układzie biegunowym

legły od każdego punktu okręgu o długość promienia (r). Promień wodzący zatoczyć musi pełny kąt 2π (rys. 5). Mamy zatem

$$\varrho = r, \ \ t \in [o, 2\pi)$$

Przykład 6. Narysuj krzywą: $\varrho = 2(1+\cos t), \ t \in [0, 2\pi)$.
Wyznaczmy najpierw kilka charakterystycznych punktów naszej krzywej:

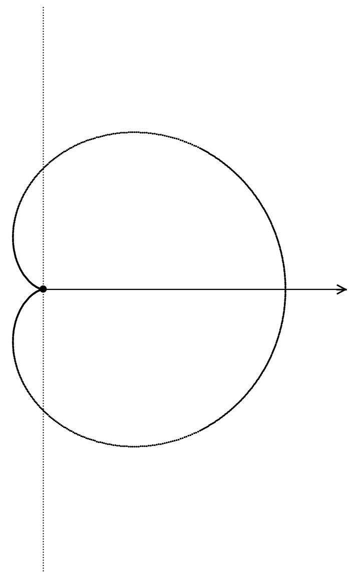
$$\begin{gathered} t = 0: \quad \varrho = 2 \cdot (1+\cos 0) = 4 \\ t = \frac{\pi}{2}: \quad \varrho = 2 \\ t = \pi: \quad \varrho = 0 \\ t = \frac{3\pi}{2}: \quad \varrho = 2 \end{gathered}$$

W przedziałach $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ oraz $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ cosinus maleje, zatem ϱ również musi maleć. Analogicznie w przedziałach $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ oraz $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ cosinus rośnie, a więc rośnie również ϱ.
Narysowana krzywa nazywana jest kardioidą (rys. 6).

Układ biegunowy przydaje się przy rysowaniu niektórych krzywych wyrażonych wzorem dla współrzędnych układu kartezjańskiego. Aby wyrazić krzywą przez współrzędne biegunowe stosuje się następujące podstawienie:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos t \\ y &= \varrho \sin t \end{aligned}$$

Spójrzmy na kolejny przykład:



Rysunek 6. Kardioida

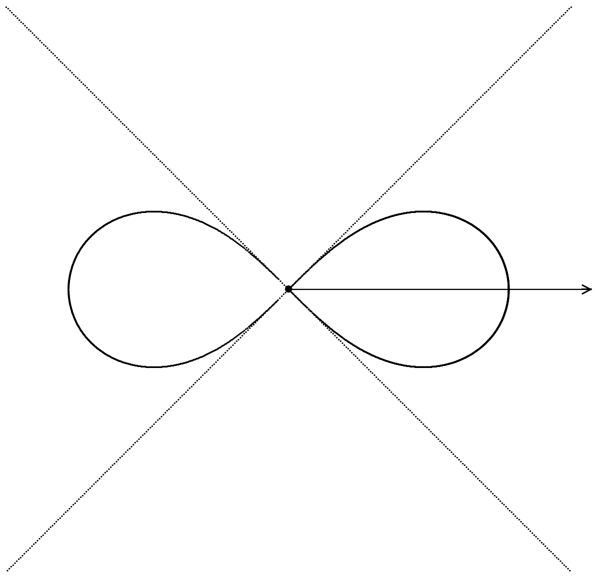
Przykład 7. Narysuj krzywą daną wzorem $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$. Zastosujmy powyższe podstawienie:

$$\begin{gathered}
((\varrho\cos t)^2 + (\varrho\sin t)^2)^2 = 2((\varrho\cos t)^2 - (\varrho\sin t)^2) \\
(\varrho^2\cos^2 t + \varrho^2\sin^2 t)^2 = 2(\varrho^2\cos^2 t - \varrho^2\sin^2 t) \\
\varrho^4(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 = 2\varrho^2(\cos^2 t - \sin^2 t) \\
\varrho^4 = 2\varrho^2\cos(2t) \\
\varrho^2 = 2\cos(2t) \\
\varrho = \sqrt{2\cos(2t)}
\end{gathered}$$

Ponieważ $t \in [0, 2\pi)$, zatem $2t \in [0, 4\pi)$ i (ze względu na postać ϱ) $\cos(2t) \geqslant 0$. Mamy:

$$\begin{aligned}
2t &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & t &\in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\
2t &\in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] & t &\in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \\
2t &\in \left[\frac{7\pi}{2}, 4\pi\right) & t &\in \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)
\end{aligned}$$

Możemy teraz zaznaczyć "fragmenty płaszczyzny", w których znajduje się omawiana krzywa. Obliczmy kilka charakterystycznych punktów krzywej i



Rysunek 7. Lemniskata Bernoulliego

zaznaczmy je w układzie.

$$t = 0: \quad \varrho = \sqrt{2}$$
$$t = \frac{\pi}{8}: \quad \varrho = \sqrt[4]{2}$$
$$t = \frac{\pi}{4}: \quad \varrho = 0$$
$$t = \frac{3\pi}{4}: \quad \varrho = 0$$
$$t = \pi: \quad \varrho = \sqrt{2}$$
$$t = \frac{5\pi}{4}: \quad \varrho = 0$$
$$t = \frac{7\pi}{4}: \quad \varrho = 0$$

Narysowana krzywa nazywana jest lemniskatą Bernoulliego (rys. 7).

2.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Narysuj następujące krzywe:

1. $\varrho = t,\ t \in [0, +\infty)$
2. $\varrho = 10\sin(3t),\ t \in [0, 2\pi)$
3. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

3. Kilka słów o płaszczyźnie Gaussa

Rozdział ten poświęcony będzie rzeczy na pozór niemożliwej, acz niewątpliwe intrygującej - pierwiastkowi z liczby -1. Nie tylko go uzyskamy, ale za jego pomocą zapoznamy się z pojęciem liczby zespolonej i jej interpretacją geometryczną na płaszczyźnie zwanej płaszczyzną Gaussa.

3.1. Kilka podstawowych informacji o liczbach zespolonych

Z liczbami spotykamy się na co dzień. Prawdopodobnie najpierw, Czytelniku, poznałeś liczby naturalne. Być może wydawało Ci się wtedy, że liczby te opisują wszystkie znane Ci zależności i niemożliwe jest, by istniały jakieś inne liczby. Niedługo potem ktoś opowiedział Ci o ułamkach - dzieleniu tortu itp. Odkryłeś, że jednak są jakieś inne liczby, które również wydają się sensowne. Kolejne były liczby ujemne (pewnie tłumaczono Ci, że musisz oddać koledze 2 zł, więc masz -2 zł). Czy to już wszystkie rodzaje liczb? Wydaje się, że do szczęścia nie potrzeba już żadnych następnych, a jednak! Wraz z problemem obliczania długości okręgu odkryłeś liczbę π - zacząłeś się posługiwać liczbami rzeczywistymi. Być może znów odnosisz wrażenie, że wiesz już wszystko i nie da się wymyślić kolejnych liczb. Czeka Cię kolejne rozczarowanie: wpajano Ci w szkole, że nie istnieje pierwiastek z liczby ujemnej? Taki problem pojawił się w XVI wieku, gdy odkrywano wzory na rozwiązania równań trzeciego stopnia. Wzory te, zwane wzorami Cardana, są prawdziwe, jeśli założymy istnienie pierwiastków z liczb nieujemnych. Kłóciło się to ze zdrowym rozsądkiem, ale ówcześni matematycy poradzili sobie z tym problemem w niezwykle prosty sposób - przyjęli, że istnieje taki pierwiastek i da się na nim wykonywać działania zgodnie z regułami obowiązującymi dla liczb rzeczywistych. Istnienie pierwiastka z -1 było jednak czymś tak niesamowitym, że pierwiastek ten nazwano *jednostką urojoną*. W ten sposób pojawiły się liczby zespolone.
Przyjmijmy zatem istnienie pierwiastka z -1 i oznaczmy go literą i. Mamy: $i^2 = -1$.
Liczbami zespolonymi nazywać będziemy liczby postaci $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Liczbę a nazywamy *częścią rzeczywistą liczby zespolonej* z i oznaczamy symbolem $\mathrm{Re}z$. Liczba b to *część urojona liczby zespolonej* z oznaczana jako $\mathrm{Im}z$. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznacza się symbolem $\mathbb{C}$.
Liczby zespolone możemy dodawać, odejmować i mnożyć:

$$
\begin{aligned}
&(2+5i)+(-4+i) = -2+6i \\
&(2+5i)-(-4+i) = 6+4i \\
&(2+5i)\cdot(-4+i) = 2\cdot(-4)+2i+5i\cdot(-4)+5i\cdot i = \\
&\qquad = -8+2i-20i+5\cdot\underbrace{i^2}_{-1} = -8-18i-5 = -13-18i
\end{aligned}
$$

Ogólnie:

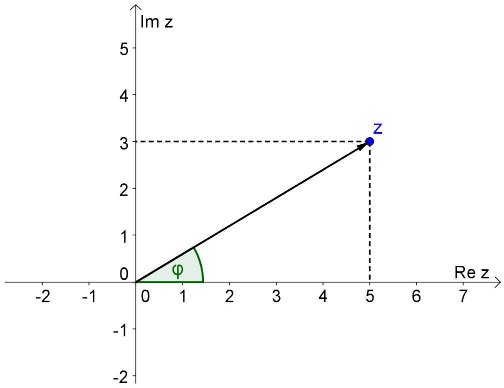
$$
\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i \\
(a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i
\end{aligned}
$$

Formalnie liczby zespolone definiuje się jako zbiór:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(a,b)\colon a,b\in\mathbb{R}\},$$

w którym działania określa się w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
(a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d) \\
(a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd, ad+bc)
\end{aligned}
$$



Rysunek 8. Płaszczyzna Gaussa

Liczbę zespoloną $z = x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ można przedstawić na płaszczyźnie jako punkt o współrzędnych (x, y) lub jako wektor o początku $(0, 0)$ i końcu (x, y). Płaszczyznę, której punktom przyporządkowano liczby zespolone, nazywa się *płaszczyzną Gaussa.*[1]

A oto najważniejsze definicje i zależności związane z liczbami zespolonymi:

1. Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$. *Sprzężeniem* liczby z (oznaczanym jako $\overline{z}$) nazywamy liczbę $a - bi$, np. $\overline{2 - 7i} = 2 + 7i$. Dla liczb $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzą nastepujące równości:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0$$

2. *Wartością bezwzględną* liczby z albo inaczej *długością* liczby z (oznaczaną jako $|z|$) nazywa się długość wektora o początku (0, 0 i końcu $z = (a, b) = a + bi$. Zatem dla $z = a + bi$ mamy: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dla $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzą następujące związki:

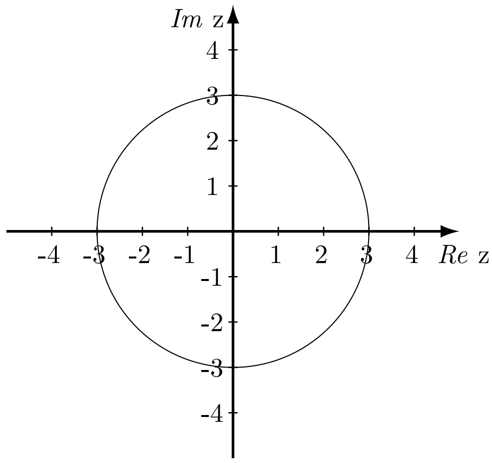
$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

3. Rozważmy teraz dowolną liczbę zespoloną $z = a + bi \neq 0$ i zauważmy (patrz rys. 8):

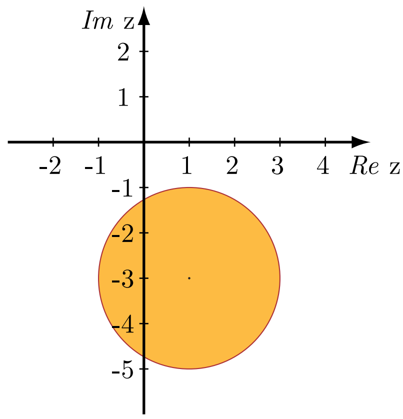
$$z = a + bi = |z|\left(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i\right) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Postać $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nazywana jest *postacią trygonometryczną* liczby z, a kąt φ - *argumentem* liczby z (oznacza się go jako $\arg z$).

[1] Długosz J. *Funkcje zespolone. Teoria, przykłady, zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, 2003, str.12



Rysunek 9. Zadanie 1.1



Rysunek 10. Zadanie 1.2

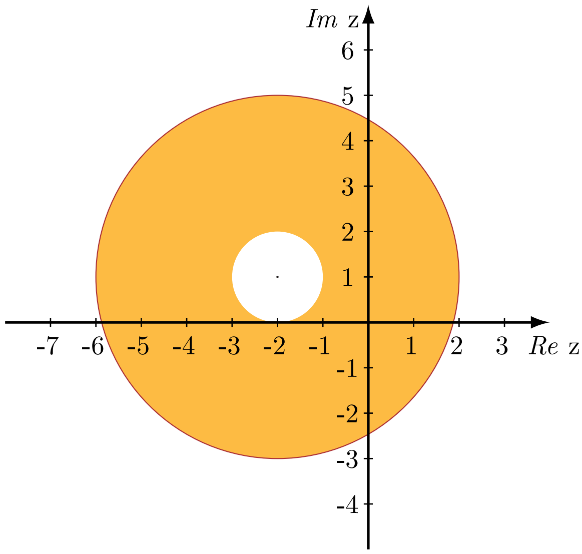
3.2. Zbiory liczb zespolonych na płaszczyźnie Gaussa

Rozważmy liczby zespolone $z_1 = x_1 + y_1 i$ oraz $z_2 = x_2 + y_2 i$. Zauważmy, że:

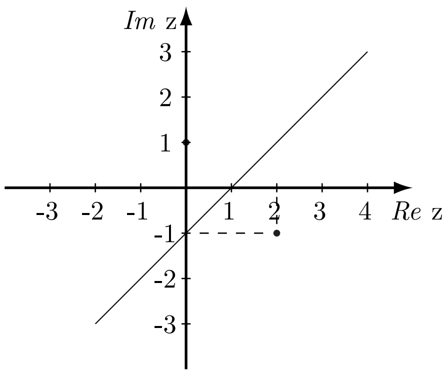
$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

a zatem $|z_1 - z_2|$ jest odległością na płaszczyźnie punktów z_1 i z_2.
Zadanie 1. Zaznacz na płaszczyźnie Gaussa następujące zbiory:

1. $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 3\}$.
   Są to punkty odległe od punktu $(0,0) = 0$ o 3 jednostki, a zatem jest to okrąg o środku w punkcie $z_0 = (0,0) = 0$ i promieniu 3.
   (patrz rys. 9)
2. $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - 1 + 3i| \leqslant 2\}$.
   Koło o środku w punkcie $z_0 = (1,-3) = 1 - 3i$ i promieniu 2.
   (patrz rys. 10)
3. $\{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z + 2 - i| \leqslant 4\}$.
   Pierścień o środku w punkcie $z_0 = (-2,1) = -2 + i$ i promieniach 1 oraz 4.
   (patrz rys. 11)



Rysunek 11. Zadanie 1.3

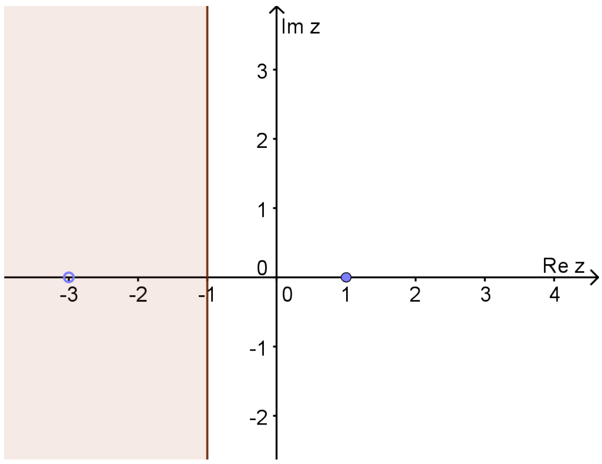


Rysunek 12. Zadanie 1.4

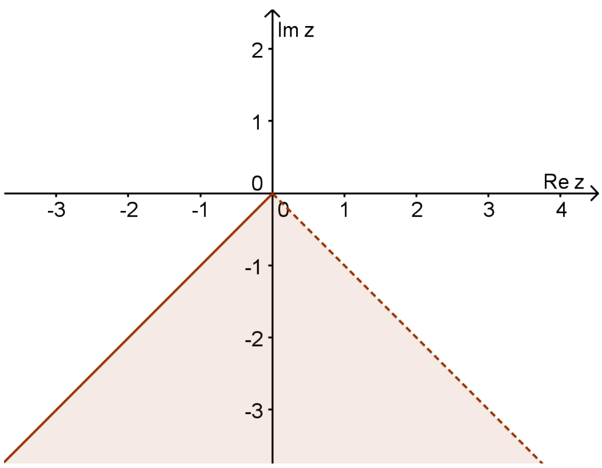
4. $\{z \in \mathbb{C}\colon |z-i| = |z-2+i|\}$.
   Symetralna odcinka o końcach w punktach $z_1 = (0,1) = i$ oraz $z_2 = (2,-1) = 2-i$.
   (patrz rys. 12)
5. $\{z \in \mathbb{C}\colon \frac{|z-1|}{|z+3|} \geqslant 1\}$.
   Półpłaszczyzna domknięta leżąca na lewo od prostej o równaniu $\mathrm{Re} z = -1$.
   Mamy: $|z-1| \geqslant |z+3|$, $z \neq -3$.
   (patrz rys. 13)
6. $\{z \in \mathbb{C}\colon \frac{3\pi}{2} \leqslant \arg(z) < \frac{5\pi}{2}\}$.
   (patrz rys. 14)
7. $\{z \in \mathbb{C}\colon \arg(z-1-3i) = \frac{\pi}{3}\}$.
   Mamy:

$$z - 1 - 3i = a\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

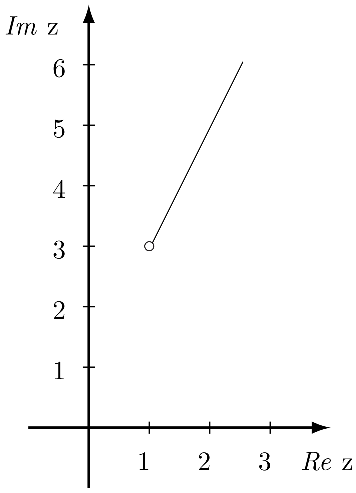
$$z = 1 + 3i + a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$



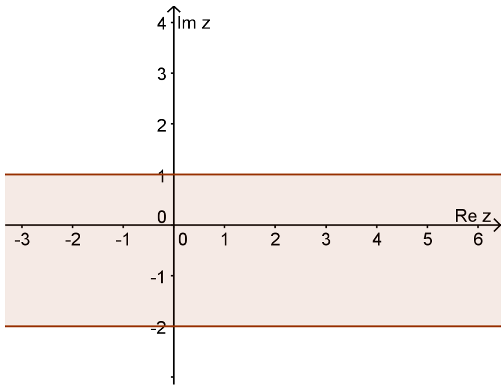
Rysunek 13. Zadanie 1.5



Rysunek 14. Zadanie 1.6



Rysunek 15. Zadanie 1.7



Rysunek 16. Zadanie 1.8

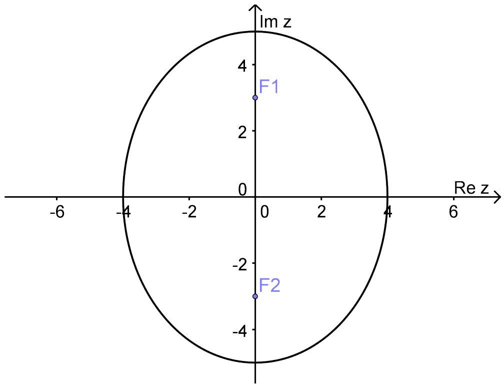
(patrz rys. 15)

8. $\{z \in \mathbb{C}\colon -1 \leqslant \mathrm{Re}(iz) \leqslant 2\}$.
   Mamy:

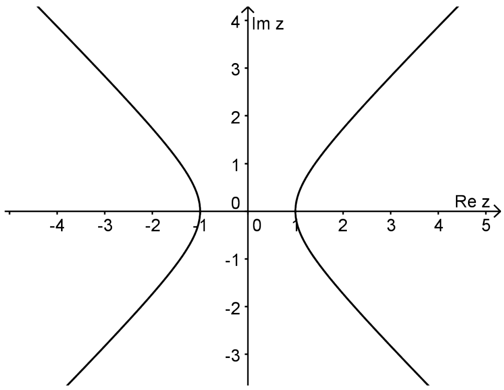
$$z = x + yi$$
$$iz = -y + xi$$
$$-1 \leqslant -y \leqslant 2$$
$$1 \geqslant y \geqslant -2$$

(patrz rys. 16)

9. $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - 3i| + |z + 3i| = 10\}$.
   Elipsa o ogniskach w punktach $F_1 = 3i$ i $F_2 = -3i$ i półosiach $a = 5$ i $b = 4$.
   Szukamy punktów, których suma odległości od punktów $F_1 = 3i$ i $F_2 = -3i$ jest stała i wynosi 10. Są to punkty leżące na elipsie (patrz: rys. 17 oraz Dodatek o krzywych stożkowych)



Rysunek 17. Zadanie 1.9



Rysunek 18. Zadanie 1.10

10. $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z^2) = 1\}$.
Hiperbola o półosiach $a = b = 1$ (patrz: Dodatek o krzywych stożkowych).

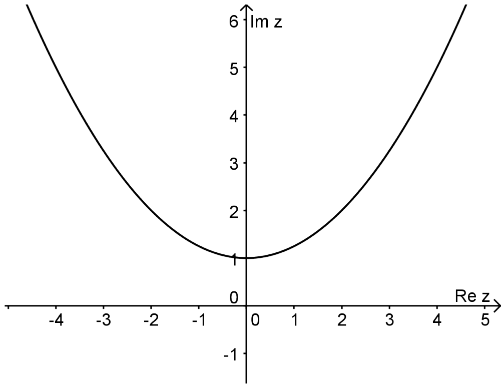
$$z = x + yi$$
$$z^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$$
$$x^2 - y^2 = 1$$

(patrz rys. 18)

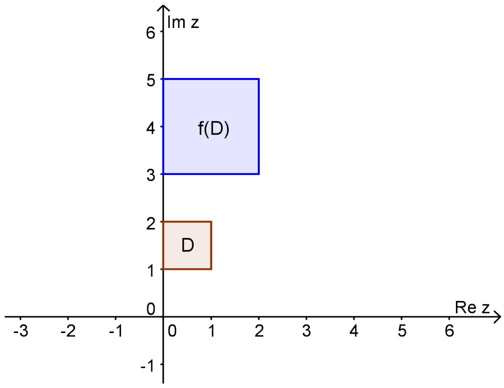
11. $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - 2i| = \mathrm{Im} z\}$.
Parabola (patrz: Dodatek o krzywych stożkowych).

$$z = x + yi$$
$$|x + yi - 2i| = y$$
$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = y$$
$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2$$
$$y = \frac{x^2}{4} + 1$$

(patrz rys. 19)



Rysunek 19. Zadanie 1.11



Rysunek 20. Zadanie 2.1

3.3. Przekształcenia zbiorów na płaszczyźnie Gaussa

W tym rozdziale zapoznamy się z funkcjami zespolonymi i zobaczymy jak zmieniają się zbiory na płaszczyźnie Gaussa po przekształceniu ich przez takie funkcje.

Zadanie 2. Narysuj podane zbiory oraz ich obrazy poprzez funkcję f.

1. $D = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant 1,\ 1 \leqslant \mathrm{Im}z \leqslant 2\}$, $f(z) = 2z + i$

$$z = x + yi$$
$$w = 2z + i = 2x + (2y+1)i$$
$$\mathrm{Re}w = 2x = 2\mathrm{Re}z \quad \mathrm{Im}w = 2\mathrm{Im}z + 1$$
$$0 \leqslant \mathrm{Re}w \leqslant 2 \quad 3 \leqslant \mathrm{Im}w \leqslant 5$$

$f(D) = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant 2,\ 3 \leqslant \mathrm{Im}z \leqslant 5\}$
(patrz rys. 20)

2. $D = \{z \in \mathbb{C}\colon \frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}\}$, $f(z) = (1+i) \cdot \overline{z}$
   Zauważmy, że $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$.

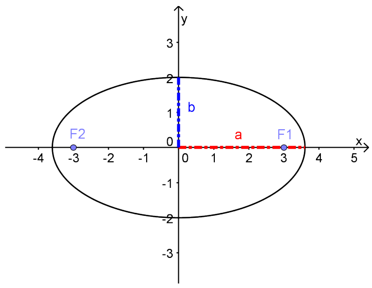
$$w = (1+i)\overline{z}$$
$$|w| = |(1+i)\overline{z}| = |1+i| \cdot |\overline{z}| = \sqrt{2}|\overline{z}| = \sqrt{2}|z|$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant |w| \leqslant \sqrt{2}$$
$$\arg w = \arg((1+i)\overline{z}) = \arg(1+i) + \arg \overline{z} = \frac{\pi}{4} - \arg z$$
$$0 \geqslant -\arg z \geqslant -\frac{\pi}{4}$$
$$\frac{\pi}{4} \geqslant \arg w \geqslant 0$$

$f(D) = \{z \in \mathbb{C}\colon \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant |z| \leqslant \sqrt{2},\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}\}$

3.4. Dodatek o krzywych stożkowych

3.4.1. Elipsa

Elipsa[2] to zamknięta krzywa algebraiczna II stopnia o wypukłym wnętrzu i dwóch wzajemnie prostopadłych osiach symetrii. Ich punkt przecięcia się jest środkiem symetrii elipsy, a ich punkty wspólne z elipsą nazywają się jej wierzchołkami. Elipsa jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny, których suma odległości od dwóch ustalonych jej punktów F_1 i F_2, zwanych ogniskami elipsy, jest stała. Ta własność elips jest wykorzystywana do ich kreślenia. W szczególnym przypadku, gdy ogniska elipsy pokrywają się, jest ona okręgiem. W kartezjańskim układzie współrzędnych, o osiach pokrywających się z osiami symetrii elipsy, ma ona równanie algebraiczne:



Rysunek 21. Elipsa

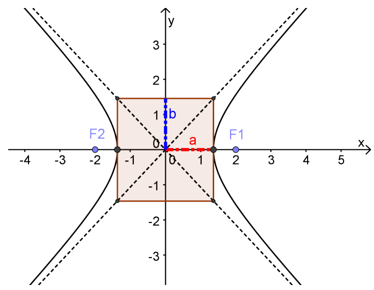
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdzie liczby dodatnie a i b są długościami tzw. półosi dłuższej i krótszej, czyli połowami długości najdłuższej i najkrótszej średnicy elipsy.

[2] Siwek E. *Szkolny słownik matematyczny*, Videograf II, 2001, str.101

3.4.2. Hiperbola

Hiperbola[3] to krzywa algebraiczna II stopnia na płaszczyźnie, złożona z dwóch rozłącznych krzywych zwanych jej gałęziami, mająca środek symetrii i dwie wzajemnie prostopadłe osie symetrii oraz dwa kierunki asymptotyczne i dwie asymptoty przecinające się w środku symetrii. Jedna spośród osi symetrii przecina obie gałęzie hiperboli w punktach zwanych jej wierzchołkami, a druga jest z nią rozłączna. Prostokąt o wierzchołkach położonych na asymptotach hiperboli, bokach równoległych do jej osi symetrii i dwóch bokach stycznych do niej w jej wierzchołkach nazywa się jej prostokątem średnicowym. Wspólne części tego prostokąta z osiami symetrii hiperboli nazywają się jej średnicami prostopadłymi, a połowy ich długości nazywają się jej półosiami. Nie są to średnice w ogólnym sensie tego słowa, lecz średnica położona na osi symetrii przecinającej hiperbolę jest najkrótszym odcinkiem łączącym punkty różnych jej gałęzi i nazywa się właściwą, a pozostała - niewłaściwą. Te same nazwy odnoszą się do półosi odpowiadających średnicom. Hiperbola o półosiach a i b ma w kartezjańskim układzie współrzędnych o osiach pokrywających się z jej osiami symetrii następujące równanie algebraiczne:



Rysunek 22. Hiperbola

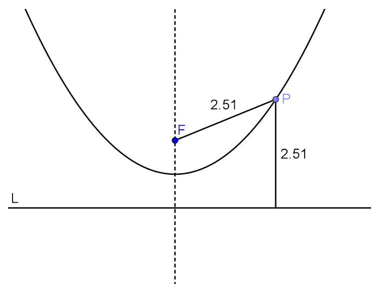
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3.4.3. Parabola

Parabola[4] to krzywa algebraiczna II stopnia, której równanie można sprowadzić do postaci

$$ax^2 - y = 0.$$

Geometrycznie parabolę można określić jako linię przecięcia się powierzchni stożkowej z płaszczyzną równoległą do jednej z tworzących tej powierzchni i nie przechodzącej przez jej wierzchołek lub - jako zbiór wszystkich punktów płaszczyzny przechodzącej przez ustaloną prostą L i punkt F leżący poza nią, których odległość od punktu F i od prostej L są równe. Punkt F nazywa się wówczas ogniskiem, a prosta L kierownicą tej paraboli. Parabola nie ma środka symetrii, lecz ma jedną oś symetrii, którą jest prosta przechodząca przez jej ognisko i prostopadła do kierownicy. Kierunek osi symetrii jest zarazem jedynem kierunkiem asymptotycznym paraboli, a jej punkt przecięcia się z parabolą nazywa się wierzchołkiem paraboli.



Rysunek 23. Parabola

[3] Siwek E. *Szkolny słownik matematyczny*, Videograf II, 2001, str.153
[4] Siwek E. *Szkolny słownik matematyczny*, Videograf II, 2001, str.309