(Prawie) najważniejsza funkcja w matematyce

Streszczenie

Celem wykładu jest uwidocznienie tego, jak niezwykłym i fundamentalnym jest rozkład normalny zmiennej losowej. W celu formalnego sprecyzowania takiego stwierdzenia wprowadzone zostają podstawowe definicje rachunku prawdopodobieństwa takie jak definicje: zmiennej losowej, jej rozkładu, gęstości, niezależności zmiennych losowych. Niektóre z nich podane są jedynie w sposób poglądowy.

Okazuje się, że aby wyprowadzić konkretny wzór na tzw. gęstość Gaussa, potrzebujemy jedynie dwóch aksjomatów:

(i) Gęstość ta jest funkcją różniczkowalną w sposób ciągły;
(ii) Najlepszym przybliżeniem zmiennej losowej o gęstości Gaussa na podstawie n danych jej wartości jest ich średnia arytmetyczna $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

Sprowadzając problem najpierw do pewnego warunkowego równania funkcyjnego, a następnie do klasycznego równania funkcyjnego Cauchy'ego, otrzymujemy jawną postać wzoru na gęstość rozkładu normalnego czyli rozkładu Gaussa (z wartością oczekiwaną równą zeru):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} .$$

Możliwość uzyskania tej formuły na bazie zaledwie dwóch zupełnie naturalnych aksjomatów (aksjomat (i) jest czysto techniczny, zaś aksjomat (ii) nie budzi żadnych zastrzeżeń ze ,,zdroworozsądkowego" punktu widzenia) uświadamia jak bardzo naturalnym i ważnym jest rozkład Gaussa. Jego powszechne występowanie w przyrodzie tłumaczy po części Centralne Twierdzenie Graniczne, które powiada (z grubsza rzecz biorąc), że sumy bardzo wielu podobnych do siebie i niezależnych od siebie losowych składników zachowują się zgodnie z rozkładem normalnym.