Liczby zespolone

Magdalena Nowak

Uniwersytet Śląski

23 marca 2012

Ciało liczb zespolonych

Rozważmy zbiór $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, czyli

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

W zbiorze $\mathbb{C}$ definiujemy następujące działania:

- **dodawanie:**

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

- **mnożenie:**

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Zbiór $\mathbb{C}$ wraz z powyższymi działaniami jest ciałem.
Zerem $\mathbb{C}$ jest element $(0, 0)$, jedynką – element $(1, 0)$.

Postać kanoniczna liczb zespolonych

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenia:

- elementy zbioru $\mathbb{C}$ postaci $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$ oznaczamy jako $\mathbf{x}$,
- elementu zbioru $\mathbb{C}$ postaci $(0, 1)$ oznaczamy jako $\mathbf{i}$.

Zauważmy, że z definicji:

$$(y, 0) \cdot (0, 1) = (y \cdot b - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, y).$$

Przyjmując powyższe oznaczenia, mamy:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y \cdot i.$$

Jednostka urojona

Zauważmy, że:

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Liczbę $i = (0, 1)$ nazywamy jednostką urojoną.

Część rzeczywista i urojona

Niech $z = a + b \cdot i$ będzie liczbą zespoloną.
Liczbę a nazywamy częścią rzeczywistą liczby zespolonej z i oznaczamy Rez (od łac. *realis).*
Liczbę b nazywamy częścią urojoną liczby zespolonej z i oznaczamy Imz (od łac. imaginalis).
Liczby, których część rzeczywista jest równa 0 (a zatem postaci yi), nazywamy czysto urojonymi, te zaś, których część urojona jest równa 0 – czysto rzeczywistymi.

Przykład

Niech $z = 2 + 3i$. Wówczas:

$$Rez = 2, \; Imz = 3.$$

Sprzężenie liczby zespolonej

Niech $z = a + b \cdot i$ będzie liczbą zespoloną.
Sprzężeniem liczby z nazywamy liczbę $\bar{z} = a - b \cdot i$.

Własności sprzężenia

Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas:

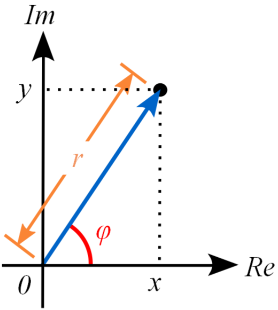
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- jeśli $w \neq 0$, to $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

Przykład

Niech $z = 3 + 2i$. Wówczas sprzężenie wynosi: $\bar{z} = 3 - 2i$.

Płaszczyzna zespolona

Liczby zespolone można utożsamiać z wektorami na płaszczyźnie zespolonej (płaszczyźnie Gaussa).
Poniższa grafika przedstawia płaszczyznę zespoloną z zaznaczoną liczbą $z = x + iy$.
Oś *Re* nazywamy osią rzeczywistą, oś *Im* – urojoną.



Długość liczby zespolonej

Długością liczby zespolonej z nazywamy jej odległość od początku układu współrzędnych. Długość liczby z oznaczamy $|z|$.
Dla liczby postaci $z = x + yi$ mamy $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Własności długości liczby zespolonej

Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas:

- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$,
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
- jeśli $w \neq 0$, to $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,
- $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

Przykład

Niech $z = 1 - \sqrt{3}i$. Wówczas $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$.

Argument liczby zespolonej

Argumentem liczby zespolonej nazywamy miarę kąta skierowanego między wektorem na płaszczyźnie zespolonej odpowiadającym tej liczbie a osią rzeczywistą. Argument liczby z oznaczamy symbolem $\arg z$. Ponieważ argument nie jest określony jednoznacznie, dodatkowo definiujemy argument główny liczby zespolonej jako jej argument należący do zbioru $(-\pi, \pi]$ (lub $[0; 2\pi)$).
Argument główny liczby zespolonej z oznaczamy symbolem $\mathrm{Arg} z$.

Przykład

Niech $z = 1 - \sqrt{3}i$. Wówczas $\cos\phi = \frac{1}{2}$, $\sin\phi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, zatem $\phi = \frac{5\pi}{3}$. Stąd wynika, że $argz = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a argument główny wynosi $\frac{5\pi}{3}$ lub $\frac{-\pi}{3}$ (w zależności od przyjętej konwencji).

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = a + bi$ będzie liczbą zespoloną, $z \neq 0$. Wówczas:

$$\frac{a}{|z|} = \cos\phi, \ \frac{b}{|z|} = \sin\phi.$$

Stąd liczbę z o argumencie ϕ i długości $|z|$ możemy zapisać w postaci

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi),$$

którą nazywamy postacią trygonometryczną liczby z.
Zastosowanie postaci trygonometrycznej znacząco ułatwia wykonywanie pewnych operacji na liczbach zespolonych.

Przykład

Niech $z = 1 - \sqrt{3}i$. Wówczas:

$$z = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$$

Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych

Niech $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ i $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ będą liczbami zespolonymi. Wówczas:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w|(\cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi)),$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi-\psi) + i\sin(\phi-\psi)).$$

Wzór Moivre'a

Niech $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ będzie liczbą zespoloną, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)).$$

Pierwiastki z liczby zespolonej

Każda niezerowa liczba zespolona $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ posiada dokładnie n pierwiastków zespolonych stopnia n. Wyrażają się one wzorem:

$$z_n = \sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n})$$

dla $k = 0, 1, ..., n-1$.

Przykład

Niech $z = 1 - z = 1 - \sqrt{3}i = z = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$. Wówczas pierwiastki drugiego stopnia z z wyrażają się wzorami:

$$z_0 = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

I znowu delta wyszła ujemna...

Rozważmy równanie kwadratowe postaci

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Obliczmy wartość wyróżnik równania:

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 = -3.$$

$\Delta < 0$, zatem równanie nie ma rozwiązań **rzeczywistych**. Wyznaczamy $\sqrt{\Delta}$:

$$\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{3}i.$$

Możemy teraz zastosować znane nam wzory:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Zauważmy, że $x_1 = \overline{x_2}$. Rozwiązania zespolone równania kwadratowego są zawsze sprzężone!

Wzory Cardano

Rozważmy równanie stopnia trzeciego postaci $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ o współczynnikach rzeczywistych, $a \neq 0$.
Aby znaleźć wszystkie jego pierwiastki (zespolone), stosujemy wzory Cardano.
Podstawmy $x = z - \frac{b}{3a}$. Wówczas równanie można zapisać w postaci $z^3 + pz + q = 0$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{R}$.
Wyliczamy wartość wyróżnika:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

- Jeśli $\Delta = 0$, równanie ma trzykrotny pierwiastek rzeczywisty.
- Jeśli $\Delta < 0$, równanie ma trzy pierwiastki rzeczywiste.
- Jeśli $\Delta > 0$, równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone.

Postać pierwiastków

Wówczas pierwiastki równania mają postać:

$$z_1 = u + v \ , \ z_2 = \epsilon_1 u + \epsilon_2 v \ , \ z_3 = \epsilon_2 u + \epsilon_1 v,$$

gdzie:

- $\epsilon_1 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
- $\epsilon_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
- $u = \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}$
- $v = \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}$