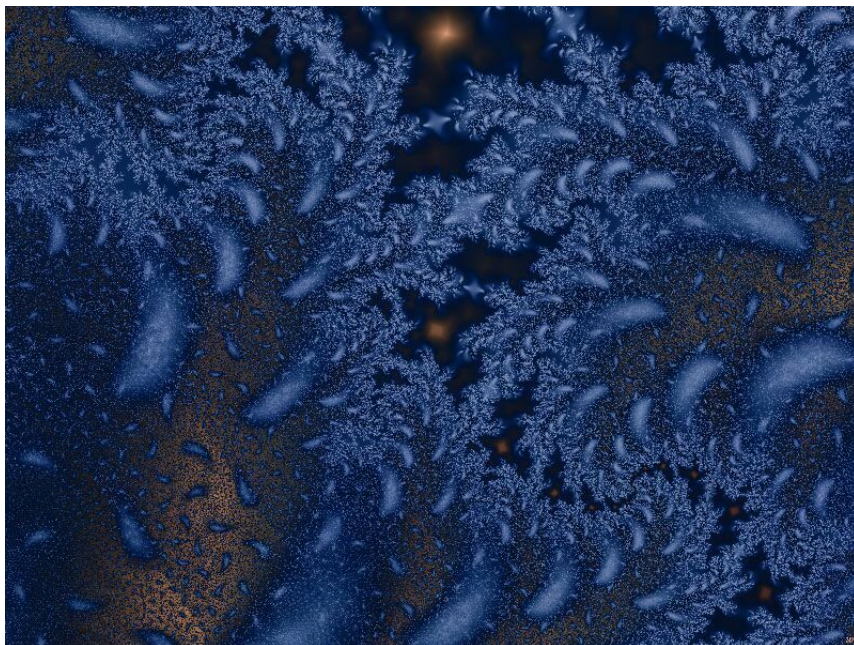


[MACI_ERZATOR62]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



Źródło: <http://www.bergoiata.org/fe/fractal3/10.htm>

Witamy w zimowym numerze [MACI_ERZATORA]!

Nowy rok – nowe plany, nowe wyzwania. Życzymy wszystkim na te nowe dni wiele energii, wspaniałych pomysłów i pełnej radości tych pomysłów realizacji, codziennego łączenia tego, co przyjemne, z tym, co pożyteczne. A na zbliżającą się sesję egzaminacyjną studentom życzymy powodzenia, egzaminatorom natomiast – jak najwięcej dobrych prac do sprawdzania i wiele cierpliwości!

Dobrego roku 2016 życzy

Redakcja

[Od Redakcji]

Przed Państwem pierwszy w roku 2016 numer [Macierzatora]. Rozpoczynamy z przytutem – wydanie to ma bowiem aż czterdzieści stron, i to jakich!

Rozpoczynamy od eseju Profesora Józefa H. Przytyckiego, matematyka z George Washington University. W artykule tym, zatytułowanym *Plaszczyna kwantowa i q-wielomian drzew z korzeniem*, Autor opisuje nowy niezmiennik drzew z korzeniem – ciekawy nie tylko sam w sobie, ale także ze względu na związki z teorią węzłów i algebrą homologiczną. Co więcej, jak pisze Profesor Józef H. Przytycki, *mamy tu do czynienia z całkowicie elementarną, niemniej zupełnie nową, interesującą matematyką*. Czytelników po przeczytaniu artykułu zachęcamy do badań tego niezmiennika, jego zastosowań i związków z innymi działami matematyki czy mechaniki statystycznej lub biologii kombinatorycznej. Przed przeczytaniem natomiast proponujemy zastanowić się nad następującym pytaniem:

Znamy wszyscy dwumianowy wzór Newtona $(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$. We wzorze tym zakładamy oczywiście, że zmienne są przemienne (to znaczy $yx = xy$). A jaki wynik dostaniemy na $(x+y)^n$, jeśli nie założymy przemienności, a tylko $yx = qxy$ dla q przemiennego z x i y ?

Profesorowi Józefowi H. Przytyckiemu gorąco dziękujemy za ofiarowanie artykułu!

Kolejny artykuł to powrót do cyklu *Impresje olimpijskie* doktora Tomasza Kochanka – niegdyś Opiekuna Koła Naukowego Matematyków UŚ, obecnie pracującego w Zakładzie Analizy Funkcjonalnej w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk. Przeczytamy o *metodzie zmiany kategorii* – przenoszeniu rozumowania matematycznego na wygodniejszy grunt, przy jednoczesnej kontroli nad tezą. *Jest to* – jak pisze Autor – *jedna z najbardziej uniwersalnych metod w matematyce*.

Na kolejnych stronach czekać będzie na Państwa tekst o Mądrych Książkach – największym w Polsce, niekomercyjnym serwisie internetowym związanym z literaturą popularnonaukową, kilka ciekawych zadań (szczególnie polecamy młodszemu Czytelnikom!) autorstwa Michała Kremzera, wstęp do fizyki laserów i artykuł o zmaganiach Andrew Wilesa z wielkim twierdzeniem Fermata.

Przyjemnej lektury życzy

Redakcja

[Płaszczyzna kwantowa i q -wielomian drzew z korzeniem]

JÓZEF H. PRZYTYCKI

Streszczenie

Prezentujemy nowy niezmiennik drzew z korzeniem. Sądzimy, że jest on ciekawy nie tylko sam w sobie, ale również poprzez związki z teorią węzłów i algebrą homologiczną. Jednak prawdziwym powodem prezentacji tego wielomianu czytelnikom Macierzatora jest to, że mamy tu do czynienia z całkowicie elementarną, niemniej zupełnie nową, interesującą matematyką. Po przeczytaniu tego eseju czytelnicy mogą wziąć udział w rozwoju badań nad tym niezmiennikiem, jego zastosowaniami i związkami z innymi działami matematyki czy też mechaniką statystyczną lub kombinatoryczną biologią.

1. Wstęp

Nieprzemieniana płaszczyzna, zwana także płaszczyzną kwantową, rozważana była już ponad sto lat temu przez MacMahona^{*}. Używa się jej w wielu dziedzinach matematyki i fizyki. Tutaj pokażemy, jak naturalnie prowadzi ona do wielomianowego niezmiennika drzew i grafów.

1.1. Nieprzemieniana płaszczyzna zwana także płaszczyzną kwantową

Wszyscy znamy standardowy wzór na dwumian Newtona:

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

Oczywiście zakładamy tutaj przemienność zmiennych, czyli $yx = xy$. Możemy wyobrazić sobie dowód bez słów, pisząc

$$(x + y)^n = (x + y)(x + y)(x + y)\dots(x + y) \quad n \text{ razy}$$

^{*}Percy Alexander MacMahon (1854–1929) – matematyk brytyjski, prekursor współczesnej kombinatoryki, w szczególności badań nad podziałami liczb.

i interpretując współczynnik przy jednomianie $x^i y^{n-i}$ jako liczbę wyborów i nawiasów spośród n nawiasów, z których wybieramy x (z pozostałych wybieramy y). Liczbą tą jest $\binom{n}{i}$.

Jeśli dowodzimy wzór dwumianowy przez indukcję, to wykorzystujemy tożsamość $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}$ – tę samą tożsamość, z którą związany jest trójkąt Pascala.

Można jednak zadać pytanie, co się stanie, gdy przemienność nieznacznie osłabimy i założymy, że $yx = qxy$ (q jest przemienne z x i y). W zastosowaniach z fizyki q jest często wybraną liczbą zespoloną, ale dla nas najlepiej jest myśleć ogólnie, że q jest zmienną, czyli pracujemy w pierścieniu wielomianów $Z[q]$.

Jeśli nie znamy wyniku, należy zacząć od przykładów:

$$(x + y)^2 = y^2 + xy + yx + x^2 = y^2 + (1 + q)xy + x^2,$$

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= y^3 + xy^2 + yxy + y^2x + x^2y + xyx + yx^2 + x^3 = \\ &= y^3 + (1 + q + q^2)xy^2 + (1 + q + q^2)x^2y + y^3. \end{aligned}$$

Widzimy, że $1 + q$ odgrywa rolę dwójki w standardowym wzorze dwumianowym. Podobnie $1 + q + q^2$ odgrywa rolę trójki. Sugeruje to, że rolę liczby n odgrywać będzie $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$, szczególnie że dla $q = 1$ otrzymamy n . Wprowadźmy więc oznaczenie na ten kwantowy odpowiednik liczby n : $[n]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$.

Liczmy dalej: $(x + y)^4 = y^4 + xy^3 + yxy^2 + y^2xy + y^3x + x^2y^2 + xyxy + xy^2x + yx^2y + yxyx + y^2x^2 + x^3y + x^2yx + xyx^2 + yx^3 + x^4 = y^4 + (1 + q + q^2 + q^3)xy^3 + (1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4)x^2y^2 + (1 + q + q^2 + q^3)x^3y + x^4 = y^4 + (1 + q + q^2 + q^3)xy^3 + (1 + q^2)(1 + q + q^2)x^2y^2 + (1 + q + q^2 + q^3)x^3y + x^4 = y^4 + [4]_q xy^3 + (1 + q^2)[3]_q x^2y^2 + [4]_q x^3y + y^4$.

Tutaj naturalną zaczyna być sugestia, że nie tylko $1 + q + \dots + q^{n-1}$ powinno być q -odpowiednikiem liczby n , ale w tym samym duchu powinniśmy zdefiniować silnię q -liczby $[n]_q$ jako: $[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \dots [2]_q [1]_q$, a q -odpowiednik symbolu Newtona, zwany także q -wielomianem Gaussa, jako $\binom{n}{i}_q = \frac{[n]_q!}{[i]_q! [n-i]_q!}$ (często by podkreślić symetrię q -wielomianu Gaussa będziemy też używać zapisu $\binom{n}{i, n-i}_q$). Możemy wtedy zapisać współczynnik przy x^2y^2 jako:

$$(1 + q^2)[3]_q = \frac{[4]_q [3]_q}{[2]_q} = \frac{[4]_q!}{[2]_q! [2]_q!} = \binom{4}{2}_q.$$

W naszej notacji poprzednie rachunki mogą być zapisane zwięźle jak poniżej:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= y^2 + [2]_q xy + x^2, \\(x+y)^3 &= y^3 + [3]_q xy^2 + [3]_q x^2 y + x^3, \\(x+y)^4 &= y^4 + [4]_q xy^3 + \frac{[4]_q [3]_q}{[2]_q} x^2 y^2 + [4]_q x^3 y + x^4 = \\&= y^4 + [4]_q xy^3 + \binom{4}{2}_q x^2 y^2 + [4]_q x^3 y + x^4.\end{aligned}$$

Można teraz zgadnąć ogólną formułę:

Stwierdzenie 1.

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}_q x^i y^{n-i}.$$

Dowód. Dowód bez słów zostawiam czytelnikom. Mimo że jest podobny do przemiennej przypadki, wymaga większego skupienia i ja go widzę, gdy jestem wyspany i po kawie...

Nietrudno zasugerować jednak dowód przez indukcję po n . Sprawdziliśmy już formułę dla $n \leq 4$ (by formuła działała potrzebujemy, jak w klasycznym przypadku, konwencji, że $[0]_q! = 1$ i w konsekwencji $\binom{n}{0}_q = 1 = \binom{n}{n}_q$). Teraz przeprowadzimy krok indukcyjny (od $n-1$ do n):

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i, n-i-1}_q x^i y^{n-i-1} = \\&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i, n-i-1}_q x^{i+1} y^{n-i-1} + \sum_{i=0}^{n-1} q^i \binom{n-1}{i, n-i-1}_q x^i y^{n-i} = \\&= \sum_{i=0}^n \left(\binom{n-1}{i-1, n-i}_q + q^i \binom{n-1}{i, n-i-1}_q \right) x^i y^{n-i}.\end{aligned}$$

Używamy konwencji, że

$$\binom{n-1}{-1, n}_q = 0.$$

Pozostaje nam sprawdzić, że

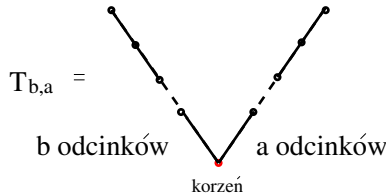
$$\binom{n-1}{i-1, n-i}_q + q^i \binom{n-1}{i, n-i-1}_q = \binom{n}{i}_q.$$

Zachęcamy czytelnika do sprawdzenia tego bez patrzenia na następujące obliczenia:

$$\begin{aligned} [a+b]_q &= 1 + q + \dots + q^{a+b-1} = \\ &= (1 + q + \dots + q^{a-1}) + q^a(1 + q + \dots + q^{b-1}) = \\ &= [a]_q + q^a[b]_q = [b]_q + q^b[a]_q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{a+b}{a, b}_q &= \frac{[a+b]_q!}{[a]_q![b]_q!} = [a+b]_q \frac{[a+b-1]_q!}{[a]_q![b]_q!} = \\ &= ([a]_q + q^a[b]_q) \frac{[a+b-1]_q!}{[a]_q![b]_q!} = \\ &= \frac{[a+b-1]_q!}{[a-1]_q![b]_q!} + q^a \frac{[a+b-1]_q!}{[a]_q![b-1]_q!} = \\ &= \binom{a+b-1}{a-1, b}_q + q^a \binom{a+b-1}{a, b-1}_q = \\ &= \binom{a+b-1}{a, b-1}_q + q^a \binom{a+b-1}{a-1, b}_q. \end{aligned}$$

Możemy interpretować klasyczną formułę na współczynniki $(x+y)^n$ przez rozważenie drzewa $T_{b,a}$ o dwóch długich krawędziach (lub raczej gałęziach) o długości, odpowiednio, b i a , wychodzących z korzenia, tak jak to jest pokazane na rysunku 1.1. Można zadać pytanie, na ile sposobów drzewo to da się oskubać jak w dziecinnej zabawie „lubi – nie lubi”, liść po liściu. Za każdym razem musimy tylko zdecydować, czy skubiemy lewą, czy prawą gałąź; lewa ma być skubana b razy, a prawa a razy. Jasne, że musimy wybrać a spośród $a+b$ ruchów, także odpowiedź to $\binom{a+b}{a}$. Nasza praca opowiada o dramatycznym uogólnieniu tego przykładu.



Rysunek 1.1; drzewo $T_{b,a}$ z gałęziami o długości b i a

Wróćmy do naszego drzewa o dwóch gałęziach i spróbujmy grać grę skubania w q -stylu. Znaczyć to będzie, że każde skubanie będzie miało wagę q podniesioną do jakiejś potęgi. Dokładniej, liść z prawej strony będzie miał wagę 1, a liść z lewej strony wagę q^a (jako przyczynę takiego wyboru podamy to, że ma on a odcinków (krawędzi) po swej prawej stronie). Tak więc jako wynik otrzymamy nie liczbę skubań, ale wielomian skubania, który oznaczmy przez $Q(T_{b,a})$. Nasza definicja daje następującą rekurencyjną relację:

$$Q(T_{b,a}) = Q(T_{b,a-1}) + q^a Q(T_{b-1,a}).$$

Zauważamy także, że $Q(T_{0,a}) = Q(T_{b,0}) = 1$. Możemy teraz rozpoznać formułę, którą dany jest wielomian skubania:

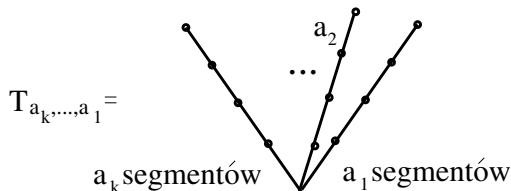
$$Q(T_{b,a}) = \binom{a+b}{a,b}_q.$$

Jest to punkt wyjściowy do ogólnej definicji q -wielomianu drzewa z korzeniem, o którym mowa w tytule tego eseju.

Możemy powtórzyć rozważania, używając wielu zmiennych: x_1, x_2, \dots, x_k . Jeśli zmienne są przemienne, to otrzymujemy znaną pewnie nam wszystkim z rachunku różniczkowego wielu zmiennych wielomianową formułę Newtona:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{a_1, \dots, a_k; \sum a_i = n}^n \binom{n}{a_1, \dots, a_k} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k},$$

gdzie $\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \dots a_k!}$. Tak jak przedtem, miłą interpretacją tego wyrażenia $\binom{n}{a_1, \dots, a_k}$ jest liczba skubań drzewa T_{a_k, \dots, a_2, a_1} o k długich gałęziach długości a_k, \dots, a_2, a_1 , tak jak to jest pokazane na rysunku 1.2 poniżej.



Rysunek 1.2; drzewo T_{a_k, \dots, a_1} z gałęziami długości a_k, \dots, a_1

Możemy teraz rozpatrzyć nieprzemiennej przestrzeń z $x_j x_i = q x_i x_j$ dla $i < j$. Otrzymamy formułę:

$$(x_1 + x_2 + \dots x_k)^n = \sum_{a_1, \dots, a_k; \sum a_i = n}^n \binom{n}{a_1, \dots, a_k}_q x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k},$$

gdzie

$$\binom{n}{a_1, \dots, a_k}_q = \frac{[n]_q!}{[a_1]_q! \dots [a_k]_q!}.$$

Aby wykazać tę formułę możemy, jak przedtem, użyć indukcji po n . Następujące tożsamości są kluczowe w dowodzie:

$$(i) [a_1 + a_2 + \dots + a_k]_q = [a_1]_q + q^{a_1} [a_2]_q + q^{a_1 + a_2} [a_3]_q + \dots + q^{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}} [a_k]_q.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \binom{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{a_1, a_2, \dots, a_k}_q &= \binom{a_1 + a_2 + \dots + a_k - 1}{a_1 - 1, a_2, \dots, a_k}_q + \\ &+ q^{a_1} \binom{a_1 + a_2 + \dots + a_k - 1}{a_1, a_2 - 1, \dots, a_k}_q + \dots + \\ &+ q^{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}} \binom{a_1 + a_2 + \dots + a_k - 1}{a_1, a_2, \dots, a_k - 1}_q. \end{aligned}$$

Ponownie możemy interpretować q -wielomianowe współczynniki poprzez q -skubanie drzewa T_{a_k, \dots, a_2, a_1} , zakładając przy q -skubaniu następującą formułę:

$$\begin{aligned} Q(T_{a_k, \dots, a_2, a_1}) &= Q(T_{a_k, \dots, a_2, a_1 - 1}) + q^{a_1} Q(T_{a_k, \dots, a_2 - 1, a_1}) + \\ &+ q^{a_1 + a_2} Q(T_{a_k, \dots, a_3 - 1, a_2, a_1}) + \dots + \\ &+ q^{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}} Q(T_{a_k - 1, \dots, a_2, a_1}). \end{aligned}$$

Rekurencyjny wzór jest taki sam jak dla q wielomianowych symboli Newtona, więc

$$Q(T_{a_k, \dots, a_2, a_1}) = \binom{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{a_1, a_2, \dots, a_k}_q.$$

2. Rekurencyjna definicja q -wielomianu płaskiego drzewa z korzeniem

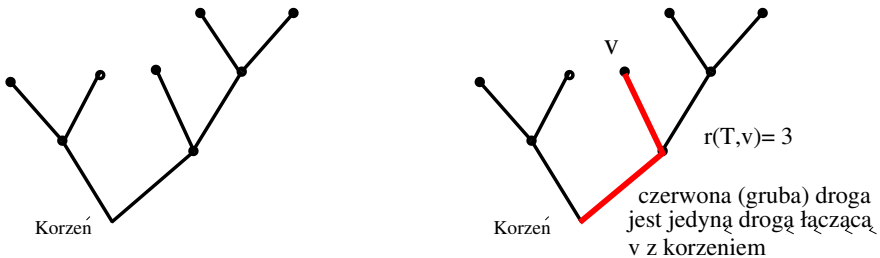
Pokażemy tutaj, jak nasze rozważania o kwantowej płaszczyźnie i nieprzemiennej przestrzeni można uogólnić do dowolnego drzewa z korzeniem (tzn. punktem wyróżnionym czy bazowym). Zaczniemy od założenia, że drzewo jest płaskie (to znaczy zanurzone na płaszczyźnie), a później wykazemy, że otrzymany q -wielomian skubania nie zależy od włożenia. Możemy zatem powiedzieć, że q -wielomian jest niezmiennikiem drzewa z korzeniem.

Tak więc zakładamy w tej konstrukcji, że drzewo z korzeniem jest zanurzone na płaszczyźnie (płaskie drzewo). W naszej konwencji drzewo rośnie do góry.

Definicja 1. Niech T będzie płaskim drzewem z korzeniem v_0 . Wtedy wielomian $Q_{T,v_0}(q)$ lub krótko $Q(T) \in \mathbb{Z}[q]$ jest zdefiniowany przez warunek początkowy $Q(\bullet) = 1$ i relację rekurencyjną

$$Q(T) = \sum_{v \in L(T)} q^{r(T,v)} Q(T-v),$$

gdzie $L(T)$ jest zbiorem liści drzewa T , to znaczy wierzchołków stopnia 1 różnych od korzenia, a $r(T,v)$ jest liczbą krawędzi T na prawo od jedynej drogi łączącej v z korzeniem v_0 ; porównaj rysunek 2.1.



Rysunek 2.1: Płaskie drzewo z korzeniem i przykład liczenia wykładnika $r(T,v)$

Dla przykładu obliczyliśmy już, że

$$Q(\surd) = (1 + q) = [2]_q$$

lub ogólniej

$$Q(T_n) = [n]_q!,$$

gdzie T_n jest gwiazdą z n promieniami,

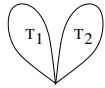
$$[n]_q = 1 + q + \dots + q^{n-1},$$

a q -silnia zdefiniowana jest analogicznie jak zwykła silnia:

$$[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [2]_q [1]_q$$

(czyli notacja, której używaliśmy w przypadku kwantowej powierzchni).

Twierdzenie 1. Niech $T_1 \vee T_2$ będzie bukietem (produktem sklejałym korzenie):



Wtedy:

$$Q(T_1 \vee T_2) = \binom{|E(T_1)| + |E(T_2)|}{|E(T_1)|}_q Q(T_1) Q(T_2).$$

Dowód. Dowód przeprowadzamy przez indukcję po liczbie krawędzi, $|E(T)|$, drzewa $T = T_1 \vee T_2$ z naturalnym warunkiem początkowym, gdy jedno z drzew nie ma krawędzi, tzn.

$$|E(T_1)||E(T_2)| = 0,$$

a formuła zachodzi w sposób oczywisty.

Dla prostoty piszemy E_i zamiast $|E(T_i)|$.

Niech T będzie płaskim drzewem z korzeniem i $E_1 E_2 > 0$. Wtedy otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
Q(T) &= \sum_{v \in L(T)} q^{r(T,v)} Q(T-v) = \\
&= \sum_{v \in L(T_1)} q^{r(T_1,v)+E_2} Q((T_1-v) \vee T_2) + \\
&+ \sum_{v \in L(T_2)} q^{r(T_2,v)} Q(T_1 \vee (T_2-v)) \stackrel{\text{założenie indukcyjne}}{=} \\
&= \sum_{v \in L(T_1)} q^{r(T_1,v)+E_2} \binom{E_1+E_2-1}{E_1-1, E_2}_q Q(T_1-v) Q(T_2) + \\
&+ \sum_{v \in L(T_2)} q^{r(T_2,v)} \binom{E_1+E_2-1}{E_1, E_2-1}_q Q(T_1) Q(T_2-v) = \\
&= Q(T_2) q^{E_2} \binom{E_1+E_2-1}{E_1-1, E_2}_q \sum_{v \in L(T_1)} q^{r(T_1,v)} Q(T_1-v) + \\
&+ Q(T_1) \binom{E_1+E_2-1}{E_1, E_2-1}_q \sum_{v \in L(T_2)} q^{r(T_2,v)} Q(T_2-v) = \\
&= Q(T_1) Q(T_2) \left(q^{E_2} \binom{E_1+E_2-1}{E_1-1, E_2}_q + \binom{E_1+E_2-1}{E_1, E_2-1}_q \right) = \\
&= Q(T_1) Q(T_2) \binom{E_1+E_2}{E_1, E_2}_q,
\end{aligned}$$

jak potrzeba*. ■

*Można zmodyfikować wielomian $Q(T)$ w ten sposób, że formuła z twierdzenia 1 stanie się homomorfizmem. W tym celu definiujemy

$$Q'(T) = \frac{Q(T)}{\|E(T)\|_q!}.$$

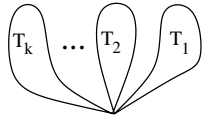
Mamy teraz

$$Q'(T_1 \vee T_2) = Q'(T_1) Q'(T_2).$$

Wadą takiej definicji jest to, że $Q'(T)$ nie zawsze jest wielomianem – często jest tylko funkcją wymierną.

Wniosek 1.

- (i) Jeśli płaskie drzewo z korzeniem jest bukietem
- k
- drzew:



to znaczy $T = T_k \vee \dots \vee T_2 \vee T_1$, to:

$$Q(T) = \binom{E_k + E_{k-1} + \dots + E_1}{E_k, E_{k-1}, \dots, E_1}_q Q(T_k)Q(T_{k-1}) \cdots Q(T_1),$$

gdzie $E_i = |E(T_i)|$ jest liczbą krawędzi T_i .

- (ii) (Formuła w postaci produktu po stanach)

$$Q(T) = \prod_{v \in V(T)} W(v),$$

gdzie $W(v)$ jest wagą wierzchołka (którą możemy nazywać wagą Boltzmanną), zdefiniowaną przez

$$W(v) = \binom{E(T^v)}{E(T_{k_v}^v), \dots, E(T_1^v)}_q,$$

gdzie T^v jest poddrzewem T z korzeniem v (część T powyżej v , innymi słowy T^v wyrasta z v) i T^v może być rozłożone na bukiet drzew:

$$T^v = T_{k_v}^v \vee \dots \vee T_2^v \vee T_1^v.$$

- (iii) (Niezależność od włożenia)

Wielomian skubania $Q(T)$ nie zależy od włożenia, jest więc niezmiennikiem drzewa z korzeniem.

Podamy teraz kilka wniosków opisujących proste bazowe własności $Q(T)$ i mających pewne znaczenie w teorii węzłów.

Wniosek 2. (1) $Q(T)$ jest postaci $c_0 + c_1q + \dots + c_Nq^N$. Zachodzą następujące własności:

- (i) $c_0 = 1 = c_N$, $c_i > 0$ dla każdego $i \leq N$.
- (ii) Niech k_v oznacza liczbę krawędzi wyrastających z wierzchołka v do góry. Inaczej mówiąc, jest to stopień wierzchołka v w drzewie T^v wyrastającym z v . W tej notacji, dla drzewa z korzeniem T mającym choć jedną krawędź, współczynnik c_1 dany jest następującym wzorem:

$$c_1 = \sum_{v \in V(T)} (k_v - 1).$$

W szczególności w przypadku nietrywialnego drzewa binarnego dla każdego wierzchołka różnego od liścia mamy $k_v = 2$ a więc

$$c_1 = |V(T)| - |L(T)|.$$

(iii) $c_i = c_{N-i}$ (tzn. $Q(T)$ jest wielomianem symetrycznym (palindromicznym)).

- (2) (i) $Q(T)$ jest iloczynem q -symboli dwumianowych (typu $\binom{a+b}{a}_q$).
- (ii) $Q(T)$ jest iloczynem wielomianów cyklotomicznych*.
- (3) Stopień wielomianu $N = \deg Q(T)$ można zapisać formułą:

$$N = \deg Q(T) = \sum_{v \in V(T)} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq k_v} E_i^v E_j^v \right),$$

gdzie, jak we wniosku 1(ii), T^v jest poddrzewem T z korzeniem v (część T powyżej v , innymi słowy T^v wyrasta z v) i T^v może być rozłożone na bukiet drzew:

$$T^v = T_{k_v}^v \vee \dots \vee T_2^v \vee T_1^v.$$

*Przypomnijmy, że n -ty wielomian cyklotomiczny jest minimalnym wielomianem, którego pierwiastkiem jest $e^{2\pi i/n}$. Możemy go zapisać:

$$\Psi_n(q) = \prod_{\omega^n = 1, \omega^k \neq 1, k < n} (q - \omega).$$

Dla przykładu $\Psi_4(q) = 1 + q^2$, $\Psi_6(q) = 1 - q + q^2$.

Dowód. Punkt 1(i) najłatwiej wykazać z definicji; nietrudno zobaczyć, że wyraz stały otrzymujemy w jednoznaczny sposób, biorąc liść najbardziej z prawej strony drzewa i powtarzając to w każdym kroku obliczeń; stąd $c_0 = 1$. Podobnie, najwyższą potęgę q otrzymujemy, biorąc liść położony najbardziej z lewej strony drzewa w definicji rekurencyjnej $Q(T)$. Wszystkie inne wybory dadzą mniejszą potęgę.

Warunek $c_i > 0$ dla każdego $i \leq n$ wymaga uważniejszego przyjrzenia się liczeniu $Q(T)$, ale dowód jest zupełnie elementarny; zostawiamy go czytelnikom, jako że w twierdzeniu poniżej dowodzimy dużo mocniejszy warunek (używając znanego z literatury nietrywialnego faktu).

(1)(ii) Najprościej użyć tutaj formuły produktowej i zobaczyć kontrybucję każdego wierzchołka do wartości c_1 :

Mamy teraz $\binom{a+b}{a,b}_q = 1 + q + \dots$, jeśli $a, b > 0$. Z tego wynika, przy użyciu wzoru z dowodu wniosku 1, że

$$\binom{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{a_1, a_2, \dots, a_k}_q = 1 + (k-1)q + \dots$$

dla $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$. Końcowy wynik dla c_1 wynika z formuły produktowej wniosku 1.

(1)(iii) Najprościej zacząć od sprawdzenia symetrii q -współczynnika Newtona. Mamy:

$$\binom{a+b}{a,b}_{q^{-1}} = q^{-ab} \binom{a+b}{a,b}_q.$$

Dalej używamy wniosku 1 i faktu, że iloczyn wielomianów symetrycznych jest symetryczny.

(2) i (3) Warunki te wynikają bezpośrednio ze wzoru produktowego we wniosku 1(ii). ■

Ćwiczenie 1. Znaleźć wzór na c_2 wielomianu $Q(T)$ dla każdego drzewa z korzeniem T .

Trudniejszym do wykazania jest następujący interesujący fakt:

Twierdzenie 2. Ciąg c_0, c_1, \dots, c_N jest unimodalny, tzn. dla pewnego j (tutaj $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ lub $\lceil \frac{N}{2} \rceil$) mamy

$$c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_j \geq c_{j+1} \geq \dots \geq c_N.$$

Dowód. Unimodalność wynika z nietrywialnego faktu, pokazanego przez Sylwestera, że q -symbole dwumianowe są unimodalne; ponadto używamy

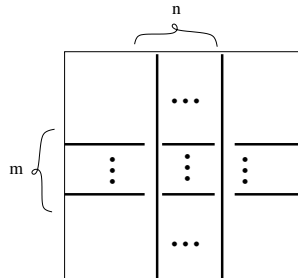
prostszej obserwacji, że produkt symetrycznych (palindromicznych) dodatnich unimodalnych wielomianów jest unimodalny (zobacz: [Sta-1, Win]). ■

Można próbować uogólnić twierdzenie 2(iii), odpowiadając na następujące pytanie: dla jakich drzew ich wielomian $Q(T)$ jest ściśle unimodalny, to znaczy $c_0 < c_1 < \dots < c_{\lfloor N/2 \rfloor} = c_{\lceil N/2 \rceil} > \dots > c_N$; (porównaj [Pak-Pan]).

3. Komentarze i powiązania

Jak podkreślałem we wstępie, wielomian skubania jest ciekawy sam w sobie, ale nigdy bym go nie skonstruował ani nie odkrył, gdybym nie spostrzegł jego cienia w moich badaniach w teorii węzłów. Motywacją była dla mnie praca z moim byłym studentem Mieczysławem Dąbkowskim i jego doktorantem Changsongiem Li, dotycząca modułów motkowych uogólnionego (kratowego) skrzyżowania; rysunek 3.1, [DLP]. W pracy tej nie używamy wielomianu $Q(T)$, jako że był on odkryty już po jej napisaniu. Będziemy go używać w przyszłych badaniach [D-P]. Węzły motywują też pewne uogólnienie wielomianu skubania przez wyposażenie drzewa w funkcję opóźniającą $f : L(V) \rightarrow \mathcal{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$, mówiącą, kiedy możemy użyć liścia w formule rekurencyjnej (dajemy tu dużo swobody czytelnikom w kwestii tego, jak zdefiniować taki wielomian skubania z funkcją opóźniającą).

Związek wielomianu skubania z nawiasem Kauffmana splotów jest precyzyjny, ale trudny do zwięzłego zapisania. Aby dać pewną ideę powiem krótko, że dotyczy on badania uogólnionego (kratowego) skrzyżowania (rysunek 3.1) przy założeniu, że każde skrzyżowanie można rozwiązać relacją motkową Kauffmana, jak na rysunku 3.2, a każdą trywialną zamkniętą składową można wyeliminować, zastępując ją wielomianem Laurenta $-A^2 - A^{-2}$.



Rysunek 3.1; $T_{m \times n}$: $m \times n$ skrzyżowanie kratowe

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \diagup \\ | \\ \diagdown \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ | \\ \diagup \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \\
 +1 \text{ znacznik} & -1 \text{ znacznik} \\
 \\
 -| = A \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + A^{-1} \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}
 \end{array}$$

Rysunek 3.2; wygładzenia Kauffmana skrzyżowania i relacja motkowa

Wielomian skubania można uogólnić do dowolnych grafów. Jeśli graf G ma punkt wyróżniony b , to niezmiennik $Q(G, b)$ jest po prostu rodziną (wielozbiorem) wielomianów skubania wszystkich drzew rozpinających graf G z korzeniem b (krótką wzmiankę na temat tego niezmiennika zamieściłem w [Prz-2]). Związek naszego niezmiennika ze znanymi niezmiennikami grafów wymaga szczegółowych badań.

Nasz wielomian ma też związek z algebrą homologiczną:

Niech \mathcal{C} będzie kompleksem łańcuchowym, to znaczy ciągiem grup abelowych, C_n i homomorfizmów $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ tak, że $\partial_{n-1}\partial_n = 0$. Na bazie kompleksu łańcuchowego definiujemy grupy homologii przez

$$H_n(\mathcal{C}) = \ker \partial_n / \text{im}(\partial_{n+1}).$$

Bardzo często homomorfizm brzegu, ∂_n , jest sumą alternującą homomorfizmów zwanych funkcjami ściany:

$$\partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i.$$

Michał Kapranov zadał pytanie, co się stanie, gdy $(-1)^i$ zostanie zastąpione przez q^i , to znaczy zdefiniujemy

$$\partial_n^q = \sum_{i=0}^n q^i d_i.$$

Zauważył on, że jeśli q jest k -tym pierwiastkiem z jedności różnym od 1 (tzn. $q^k = 1, q \neq 1$) to k -ta iteracja ∂^q daje zero [Kapr]:

$$\partial_{n-k+1}^q \dots \partial_{n-1}^q \partial_n^q = 0.$$

To, że idea Kapranova jest w jakiś sposób związana z q -wielomianem drzewa z korzeniem wydaje się jasne, ale precyzyjne związki wymagają badań (może Ty, Czytelniku, tym się zajmiesz?).

Literatura

- [DLP] M.K. Dąbkowski, C. Li, J.H. Przytycki, *Catalan states of lattice crossing*, Topology and its Applications 182, March, 2015, 1–15; dostępny on-line pod adresem: [arXiv:1409.4065](https://arxiv.org/abs/1409.4065) [math.GT].
- [D-P] M.K. Dąbkowski, J.H. Przytycki, *Catalan states of lattice crossing II*, w przygotowaniu.
- [Kapr] M.M. Kapranov, *On the q -analog of homological algebra*, Journal Knot Theory Ram., przyjęta do druku; e-print [arXiv:q-alg/9611005](https://arxiv.org/abs/q-alg/9611005).
- [Lod] J.L. Loday, *Cyclic Homology*, Grund. Math. Wissen. Band 301, Springer-Verlag, Berlin 1992.
- [Pak-Pan] I. Pak, G. Panova, *Strict Unimodality of q -Binomial Coefficients*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 351 (11–12) 2013, 415–418; dostępny on-line pod adresem: [arXiv:1306.5085](https://arxiv.org/abs/1306.5085) [math.CO].
- [Prz-1] J.H. Przytycki, *Progress in distributive homology: from q -polynomial of rooted trees to Yang-Baxter homology*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach – Algebraic Structures in Low-Dimensional Topology, Report No. 26/2014, 2014, 47–50; dostępny on-line pod adresem: [arXiv:1406.6499](https://arxiv.org/abs/1406.6499) [math.GT].
- [Prz-2] J.H. Przytycki, *Knots and Graphs: two centuries of interaction*, Proceedings of Knots-2013, Mohali, India, przyjęty do druku w Contemporary Mathematics.
- [Sta-1] R.P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Ann. New York Sci., 576, New York Acad. Sci., New York 1989, 500–535.
- [Sta-2] R.P. Stanley, *Algebraic Combinatorics, Walks, Trees, Tableaux, and more*; Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2013.
- [Win] A. Wintner, *Asymptotic Distributions and Infinite Convolutions*, Edwards Brothers, Ann Arbor, Michigan, 1938.

Józef H. Przytycki

Wydział Matematyki, George Washington University,
oraz University of Maryland College Park,
a także Uniwersytet Gdański.

[Impresje olimpijskie]

Metoda zmiany kategorii

TOMASZ KOCHANEK

Zajmując się matematyką, poznajemy i – przy odrobinie dobrej woli – wprowadzamy do swojego repertuaru dziesiątki metod, sztuczek, algorytmów, czy też pewnych przyzwyczajęń, zapewne zbyt często nazywanych doświadczeniem. Podobnie jak twierdzenia, stanowiące trzon każdej teorii, są to narzędzia zaprojektowane na ogół z myślą o zastosowaniu ich w konkretnej, dobrze określonej sytuacji. Matematyka dla matematyka staje się jednak ciekawa wtedy, gdy jest trudna, a zatem wtedy, gdy posiadany repertuar w sposób bezpośredni nie gwarantuje jasnego rozwiązania. Nierzadko więc można znaleźć się w sytuacji, gdzie wszelkie typowe metody zawodzą, a nasze rozumowania po pewnym czasie zdają się polegać jedynie na beznadziejnym przeformułowywaniu danego problemu na wersje bynajmniej od niego nie prostsze. Warto w takich sytuacjach pamiętać o kilku ideach natury ogólnej, a może nawet po trosze filozoficznej.

Omówimy tu jedną z takich idei – metodę polegającą na przenoszeniu rozumowania na wygodniejszy grunt, przy jednoczesnej kontroli nad tezą. Mowa tutaj o sytuacji, w której dowodzona teza wygląda na niekompatybilną (choćby w intuicyjnym sensie) z naturalnymi cechami obiektu, którego dotyczy. Dążymy do tego, by przez odpowiednią manipulację zmienić obiekt na taki, dla którego teza, być może nieco zmodyfikowana, staje się czymś niemal oczywistym. Jest to, rzecz jasna, jedna z najbardziej uniwersalnych metod w matematyce, którą na potrzeby tego artykułu nazwiemy roboczo *metodą zmiany kategorii*. Związki tej idei z teorią kategorii są bardziej niż oczywiste i zilustrujemy je pod koniec dwoma klasycznymi zastosowaniami: w analizie funkcjonalnej i topologii.

Warto podkreślić, że pomimo swojej ogólności, myśl o zmianie kategorii może być pomocna zarówno w przypadku elementarnych zadań olimpijskich, jak i w pracach nad całkiem „poważną” matematyką. Nasz pierwszy przykład sprawia wrażenie, jakby był wręcz zaprojektowany specjalnie jako ilustracja tej idei.

Zadanie 1 (M.E. Kuczma [3]). Poniższy diagram przedstawia początkowe wiersze nieskończonej tabeli trójkątnej. Skrajnymi elementami kolejnych wierszy są kolejne liczby naturalne. Obowiązuje ponadto reguła: jeśli liczby b , c są sąsiednimi elementami dowolnego wiersza, nad nimi znajduje się liczba a , zaś pod nimi liczba d , to $a + d = b + c + 2$. Udowodnić, że dla

każdej liczby całkowitej $k \geq 2$ istnieje nieskończenie wiele liczb, z których każda występuje w tej tabeli dokładnie k razy.

			0					
			1	1				
		2	4	2				
	3		7	7	3			
4		10	12	10		4		
...

Pierwszym odruchem jest szukanie jawnych wzorów wiążących któreś z elementów tej tabeli, co zresztą nie jest trudne, bo dość szybko dostrzegamy ciągi arytmetyczne leżące na liniach równoległych do ramion trójkąta. Odgadnięcie stosownych wzorów jest prostą sprawą – jeżeli tabelę zapiszemy w postaci nieskończonej macierzy

$$(a_{m,n})_{m,n=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ 1 & 4 & 7 & 10 & \dots \\ 2 & 7 & 12 & 17 & \dots \\ 3 & 10 & 17 & 24 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

to mamy $a_{m,n} = 2mn + m + n$ dla $m, n \geq 0$. Nie zmienia to faktu, że teza zadania wydaje się nie do końca kompatybilna z tą konkretną tablicą i nie widać bezpośredniego powodu dla jej prawdziwości. Czy istnieją jednak podobne tablice, dla których warunek z tezy staje się naturalny? Wyborów jest sporo. W tym przypadku odpowiednim obiektem będzie tabliczka mnożenia przez liczby nieparzyste. Dla takiego obiektu teza jest banalna, bowiem liczba wystąpień danej liczby nieparzystej równa jest po prostu liczbie jej dzielników dodatnich. Przykładowo więc, liczby postaci p^{k-1} , gdzie p jest liczbą pierwszą, występują tam dokładnie k razy.

Trzeba jeszcze wiedzieć, jakiego rodzaju morfizm byłby tu odpowiedni, tj. jak dobrać odwzorowanie, za pomocą którego przejdziemy od macierzy $(a_{m,n})_{m,n=0}^{\infty}$ do naszego nowego obiektu kontrolując jednocześnie tezę. Skoro mowa o licznosciach wystąpień, odpowiednimi morfizmami będą tu funkcje różnowartościowe i nietrudno sprawdzić, że w naszej sytuacji zadziała funkcja $b_{m,n} = 2a_{m,n} + 1$ ($m, n \geq 0$).

Zauważmy, że w przedstawionym rozwiązaniu dokonaliśmy wyłącznie zmiany obiektu. Teza pozostała bez zmian, a znaleziony morfizm zachowywał jej prawdziwość/falszywość.

Szczególne przypadki metody zmiany kategorii spotykamy chyba w każdym dziale matematyki. Najprostsza zasada bijekcji, przy pomocy której sprowadzamy zliczanie obiektów kombinatorycznych do zliczania innych, jest jednym z takich przypadków. Choć sama w sobie banalna, pomysł na jej użycie prowadzi często do całkiem nietrywialnych wyników, jak np. w przypadku wyprowadzenia jawnych wzorów na liczby Catalana, czy też użycia kodu Prüfera do dowodu wzoru Cayleya na liczbę drzew. Korzystamy z tej metody, gdy wyprowadzamy skomplikowane tożsamości podając stosowną ich interpretację kombinatoryczną, a także wtedy, gdy rozwiązując zadanie z teorii liczb, dowodzimy podzielności przedstawiając stosowny iloraz np. w postaci iloczynu współczynników dwumianowych.

Jednym z najsilniejszych narzędzi w kombinatoryce „olimpijskiej” jest metoda funkcji tworzących, której poświęcono niezliczone opracowania. Przytoczymy tu przykład ilustrujący zastosowanie podobnej idei, tzw. *metody wielomianowej* – kolejnego wcielenia metody zmiany kategorii. W tym przypadku stosowna zmiana obiektu w sposób naturalny dyktuje również przeformułowanie tezy, a ta automatycznie przybiera znacznie przyjemniejszą postać.

Zadanie 2 (V. Kovač [2]). Niech k, m, n będą liczbami naturalnymi, przy czym $m \leq n$. Załóżmy, że A_1, \dots, A_k są m -elementowymi podzbiórmi zbioru $S = \{1, 2, \dots, n\}$ i że dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$ istnieje rozbitcie

$$S = S_1^{(i)} \cup S_2^{(i)} \cup \dots \cup S_m^{(i)} \quad (3.1)$$

zbioru S (na parami rozłączne podzbiory) o następujących własnościach:

- (i) zbiór A_i ma dokładnie jeden element wspólny z każdym spośród zbiorów $S_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$);
- (ii) każdy ze zbiorów A_j , dla $j \neq i$, jest rozłączny z choć jednym spośród zbiorów $S_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

Udowodnić, że $k \leq \binom{n-1}{m-1}$.

Tutaj zmiana kategorii zasadza się na pomyśle stanowiącym fundament metody funkcji tworzących – kodowaniu obiektów kombinatorycznych przy pomocy wielomianów (bądź szeregów potęgowych). Nowym obiektem odpowiadającym każdemu z podziałów (3.1) będzie wielomian $n - 1$ zmiennych

x_2, x_3, \dots, x_n określony wzorem

$$P_i(x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod_{j=2}^m \sum_{s \in S_j^{(i)}} x_s,$$

przy czym założyliśmy, co możemy uczynić po ewentualnym przenumerowaniu, że $1 \in S_1^{(i)}$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$ (a zatem zmienna x_1 nigdzie nie występuje). Co możemy powiedzieć o tych wielomianach w oparciu o własności naszych podziałów? Z faktu, że elementy każdego z podziałów są parami rozłączne wynika dokładnie tyle, że wszystkie jednomiany wchodzące w skład P_i mogą zawierać każdą ze zmiennych x_s ($s \in S$) najwyżej w pierwszej potędze. Wszystkie P_i są też jednorodne i mają stopień $m - 1$. Rodzina takich wielomianów tworzy zaś przestrzeń wektorową nad ciałem \mathbb{R} , której wymiar wynosi (któż by się spodziewał...) dokładnie $\binom{n-1}{m-1}$.

Teza zadania w sposób zaskakująco naturalny przekształciła się więc w stwierdzenie, że liczba określonych przez nas wielomianów P_i nie przekracza wymiaru przestrzeni liniowej, do której wszystkie z nich należą. Wystarczy więc wykazać, że wielomiany te są liniowo niezależne. Pozostawimy tę część czytelnikowi jako przyjemne ćwiczenie; jasne, że muszą tu zainteresować założenia (i) oraz (ii).

Metoda zmiany kategorii występuje czasem w uproszczonej formie – kiedy za samą tezę ukryty jest niejako nowy obiekt, *explicite* w treści zadania niewystępujący. Powołanie takiego obiektu do życia na ogół natychmiast rozwiązuje sprawę, co jakoś tłumaczy fakt, że zadania tego typu bywają dość złośliwe i słusznie sprawiają wrażenie układanych pod jeden, konkretny trik. Poniższe dwa przykłady dobrze to ilustrują.

Zadanie 3 (17th V. Jarník *Ann. Math. Comp.*, Ostrawa 2006). Niech S będzie zbiorem skończonym złożonym z n elementów, a \mathcal{F} rodziną podzbiorów zbioru S spełniającą warunek:

$$A \in \mathcal{F}, A \subseteq B \subseteq S \implies B \in \mathcal{F}.$$

Wykazać, że funkcja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(t) = \sum_{A \in \mathcal{F}} t^{|A|} (1-t)^{|S \setminus A|}$$

jest funkcją (słabo) rosnącą, gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A .

Całe rozwiązanie sprowadza się w istocie do jednej obserwacji: wyrażenie definiujące wartość $f(t)$ jest w naturalny sposób miarą pewnego zbioru, naturalnie związanego z rodziną \mathcal{F} . Chwila refleksji przekonuje, że zbiorem tym jest podzbiór \mathbb{R}^n określony jako $M_t := \bigcup_{A \in \mathcal{F}} I_{t,A}$, gdzie

$$I_{t,A} := \prod_{j=1}^n I_{t,A}^{(j)}, \quad \text{natomiast } I_{t,A}^{(j)} := \begin{cases} [0, t] & \text{dla } j \in A, \\ [t, 1] & \text{dla } j \notin A. \end{cases}$$

Definicje te są zupełnie naturalne w świetle naszej obserwacji. Zauważmy, że zbiory $I_{t,A}$ (dla $A \in \mathcal{F}$) są parami rozłączne, a więc miarą ich sumy jest suma miar. Do wykazania pozostaje więc, że jeżeli $0 \leq t < u \leq 1$, to $M_t \subseteq M_u$, co pozostawiamy czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

Zadanie 4. Wykazać, że

$$\int_0^\pi \int_{-1}^1 \sqrt{\left(1 + \frac{r}{2} \cos \theta\right)^2 + \frac{r^2}{16}} \, dr \, d\theta = 2\pi.$$

To zadanie jest bardziej złośliwe niż poprzednie i można traktować je w formie żartu. Rozwiązanie brzmi: zauważmy, że całka po lewej stronie równości przedstawia miarę powierzchniową wstęgi Möbiusa powstałej ze skrócenia i sklejenia prostokąta o wymiarach $1 \times 2\pi$. Musi być zatem równa polu powierzchni tego prostokąta, tj. 2π .

Mówiąc bardziej precyzyjnie, wyrażenie po lewej stronie to dokładnie to, co otrzymalibyśmy stosując znany z kursu analizy wzór na miarę powierzchniową Lebesgue'a (całka z pierwiastka kwadratowego wyznacznika Grama $\det(D\Psi(\mathbf{x})^T D\Psi(\mathbf{x}))$), zastosowany do standardowej parametryzacji $\Psi: [0, 2\pi) \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ wstęgi Möbiusa. Równość tej całki i pola prostokąta wymaga pewnego uzasadnienia, które jest jednak prostym ćwiczeniem z definicji miary powierzchniowej. Intuicyjnie zaś jest to całkowicie oczywiste, bo przecież naszego prostokąta w żaden sposób nie rozciągamy.

Skoro o intuicji mowa... Jak wiadomo, wstęga Möbiusa jest jednostronna, a zatem wydawać by się mogło, że obydwie strony naszego prostokąta powinny w jakiś sposób partycypować w jej powierzchni. Czyż nie oznacza to jednak, że miara tej powierzchni wynosi raczej 4π , niż 2π ...? Oczywiście nie – z tego samego powodu, dla którego nie twierdzimy, że przy obliczaniu pola prostokąta należałoby uwzględnić obie strony (a przecież powierzchnia wstęgi przybliża się sumą powierzchni małych kawałków przypominających zupełnie przyzwoite prostokąty). Zdarzyło mi się zadać to pytanie studentom podczas ćwiczeń z analizy matematycznej. Około połowy respondentów

przytomnie trzymało się poprawnej odpowiedzi, pozostali dali się zaś nabrać na grubymi nićmi szytą prowokację. Na szczęście miary powierzchni wstęgi Möbiusa nie musimy ustalać w demokratycznych wyborach.

Zilustrujemy teraz metodę zmiany kategorii na przykładzie dwóch ważnych twierdzeń. Pierwsze z nich jest jednym z podstawowych faktów teorii C^* -algebr, mającym istotne znaczenie w matematycznym sformułowaniu mechaniki kwantowej, drugie – jednym z najsłynniejszych twierdzeń o punkcie stałym. Strategia dowodu w obydwu przypadkach będzie już miała zupełnie ścisły związek z teorią kategorii, której podstawową terminologię powinniśmy tu zatem przypomnieć.

Mówiąc o dowolnej kategorii \mathcal{C} , mamy na myśli dwa jej składniki: klasę $\text{ob}(\mathcal{C})$ obiektów tej kategorii oraz, dla dowolnej pary $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$, zbiór $\text{mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ zwany zbiorem morfizmów z X do Y . Wymagamy przy tym, aby dozwolone było rozsądne składanie morfizmów, tzn. aby dowolnym $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$, $f \in \text{mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ i $g \in \text{mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ przyporządkowany był morfizm $g \circ f \in \text{mor}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ w ten sposób, że zachodzi prawo łączności $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, a także, aby dla każdego $X \in \text{ob}(\mathcal{C})$ identyczność id_X należała do $\text{mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$. Do porównywania kategorii służą funktory, o których można myśleć jak o morfizmach między kategoriami. Formalnie rzecz biorąc, *funktor kowariantny* $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ działający między kategoriami \mathcal{C} i \mathcal{D} składa się z funkcji $F: \text{ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{D})$ oraz przypisanych każdej parze $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ funkcji

$$F_{X,Y}: \text{mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{mor}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)),$$

przy czym:

- (i) $F_{X,Z}(g \circ f) = F_{Y,Z}(g) \circ F_{X,Y}(f)$;
- (ii) $F_{X,X}(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$

dla wszelkich $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$ oraz $f \in \text{mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ i $g \in \text{mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$. Przymiotnik „kowariantny” odpowiada temu, że funktory takie nie zmieniają kierunku działania morfizmów, w odróżnieniu od funktorów, które nazywamy kontrawariantnymi.

Przejdziemy teraz do pierwszego z zapowiedzianych twierdzeń. Przypomnijmy, że C^* -algebrą nazywamy zespoloną algebrę Banacha \mathcal{A} wyposażoną w involucję $\mathcal{A} \ni x \mapsto x^*$ (tj. antyliniowe odwzorowanie spełniające $(xy)^* = y^*x^*$ i $x^{**} = x$ dla $x, y \in \mathcal{A}$), dla której spełniony jest warunek $\|x^*x\| = \|x\|^2$. Element $x \in \mathcal{A}$ nazywamy *dodatnim*, jeżeli jest kwadratem

pewnego elementu samosprężonego, tzn. $x = y^2$, przy czym $y = y^*$ (równoważnie: x jest postaci $x = z^*z$ dla pewnego $z \in \mathcal{A}$). Funkcjonał liniowy $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ nazywamy *dodatnim*, gdy $f(z^*z) \geq 0$ dla każdego $z \in \mathcal{A}$; jeżeli zaś \mathcal{A} ma jedynekę $\mathbf{1}$, a funkcyjonał f jest dodatni i spełnia $f(\mathbf{1}) = 1$, to nazywamy go *stanem*. Takie funkcyjonały pełnią kluczową rolę w teorii reprezentacji C^* -algebr, a w matematycznym formalizmie mechaniki kwantowej odpowiadają stanom układu kwantowego opisanego przez daną C^* -algebrę (które elementy samosprężone odpowiadają obserwabdom).

Można, dla pewnego uproszczenia, pomyśleć o kanonicznym przykładzie $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, tj. gdy \mathcal{A} jest algebrą macierzy zespolonych określonego wymiaru; inwolucja to w tym przypadku sprzężenie hermitowskie, a dodatniość to nic innego, jak dodatnia określoność macierzy. Już w tym przypadku przytoczone twierdzenie (mówiące po prostu, że stany mają normę 1) okazuje się całkiem nietrywialne.

Twierdzenie 1. Niech \mathcal{A} będzie C^* -algebrą z jedyneką $\mathbf{1}$, a $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ dodatnim funkcyjonałem liniowym. Wówczas $\|f\| = f(\mathbf{1})$.

Przy abstrakcyjnie postawionej definicji C^* -algebry nie jest wcale oczywiste, jak należałoby takiego twierdzenia dowodzić. Należy zaznaczyć, że metoda zmiany kategorii w naszym pojęciu nie jest w żadnym razie tym, czym równie często wykorzystywana metoda redukcji, polegająca na umiejętnym posklejaniu tezy z kilku jej szczególnych przypadków. Zdarza się jednak, że obie te idee znakomicie się uzupełniają, i tak właśnie jest w rozważanym przypadku.

Najpierw redukcja. Każdy funkcyjonał liniowy $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ generuje formę półtoraliniową $[\cdot, \cdot]_f: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ według wzoru $[x, y]_f = f(y^*x)$. Jeśli f jest przy tym dodatni, to forma ta jest dodatnio określona, co pozwala wyprowadzić dla niej nierówność Cauchy'ego-Schwarza:

$$|f(y^*x)|^2 \leq f(x^*x)f(y^*y) \quad (x, y \in \mathcal{A}). \quad (3.2)$$

Zauważmy teraz, że nierówność $\|f\| \geq f(\mathbf{1})$ jest oczywista (jedyneką ma normę 1), zaś (3.2) implikuje, że

$$|f(z)|^2 = |f(\mathbf{1}^*z)|^2 \leq f(\mathbf{1})f(z^*z) \quad (z \in \mathcal{A}).$$

Żądaną nierówność $\|f\| \leq f(\mathbf{1})$ uzyskamy więc, jeśli tylko wykażemy, że dla każdego $z \in \mathcal{A}$ spełniającego $\|z\| \leq 1$ mamy $f(z^*z) \leq f(\mathbf{1})$, czyli $f(\mathbf{1} - z^*z) \geq 0$. Wystarczy zatem pokazać, że $\mathbf{1} - z^*z$ jest elementem dodatnim.

Istotą przeprowadzonej redukcji jest to, że zacieśniliśmy rozważania do pewnych specjalnych elementów algebry \mathcal{A} – tych mianowicie, które są postaci z^*z , a wszystkie tego typu elementy są oczywiście samosprężone. Podalgebra $\mathcal{A}_0 = C^*(z^*z, \mathbf{1})$ (najmniejsza C^* -podalgebra algebry \mathcal{A} zawierająca z^*z i $\mathbf{1}$), do której sprowadził się nasz problem, jest więc algebrą *przemiennej*. Teraz czas na zmianę kategorii.

Fundamentalne twierdzenie Gelfanda-Najmarka głosi, że każda przemienne C^* -algebra z jedyneką jest izometrycznie $*$ -izomorficzna z algebrą $C(\Omega)$ zespolonych funkcji ciągłych określonych na pewnej zwartej przestrzeni Hausdorffa Ω , zwanej widmem algebry. (W przypadku braku jedynki Ω jest tylko lokalnie zwarta, a zamiast $C(\Omega)$ mamy algebrę $C_0(\Omega)$ ciągłych funkcji znikających w nieskończoności.) Kanoniczna odpowiedniość $\Omega \leftrightarrow C(\Omega)$ jest funktorem kowariantnym między kategorią zwartych przestrzeni Hausdorffa (gdzie morfizmy to odwzorowania ciągłe) a kategorią *wszystkich* przemiennych C^* -algebr z jedyneką (gdzie morfizmy to zachowujące jedynekę $*$ -homomorfizmy). Wszystkich – bo każdą taką C^* -algebrę możemy utożsamiać z pewną algebrą postaci $C(\Omega)$. Szczegóły tego utożsamienia, związane z własnościami transformaty Gelfanda, nie są tu dla nas bardzo istotne, a zainteresowany czytelnik może sięgnąć np. po książkę [1]. Odnotujmy tylko, że jeśli $\Phi(x) \in C(\Omega)$ jest funkcją odpowiadającą elementowi $x \in \mathcal{A}$, to jej obraz jest dokładnie widmem x , tj. zbiorem

$$\sigma(x) = \{ \mu \in \mathbb{C} : \mu \cdot \mathbf{1} - x \text{ nie jest odwracalny} \},$$

który to jest zawsze zawarty w kuli o środku w zerze i promieniu $\|x\|$.

Wróćmy do naszego dowodu. Każdy element algebry \mathcal{A}_0 może być utożsamiony z jakąś funkcją ciągłą. W szczególności elementowi z^*z odpowiada funkcja $\Phi(z^*z)$ o wartościach rzeczywistych (bo z^*z jest samosprężony) i na moduł nieprzekraczających 1 (bo $\|z^*z\| \leq 1$), a zatem – wartościach leżących w przedziale $[-1, 1]$. W takim razie funkcja $\Phi(\mathbf{1} - z^*z)$ przyjmuje wartości w przedziale $[0, 2]$, a to oznacza, że ma ona rzeczywisty pierwiastek kwadratowy. Element $\mathbf{1} - z^*z$ ma więc samosprężony pierwiastek kwadratowy, tzn. jest elementem dodatnim, a to kończy dowód. Widzimy więc, że po odpowiedniej zmianie kategorii (i wcześniejszej redukcji) teza twierdzenia stała się niemal oczywista.

Ostatni przykład to równoważna wersja słynnego twierdzenia Brouwera o punkcie stałym, które mówi, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ dowolna funkcja ciągła odwzorowująca kulę jednostkową $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ w siebie ma punkt stały. Przypomnijmy klasyczne rozumowanie: gdyby $f: D^n \rightarrow D^n$ była funkcją ciągłą bez punktu stałego, dla każdego $x \in D^n$ moglibyśmy

jednoznacznie określić punkt $r(\mathbf{x}) \in S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ za pomocą warunku:

$$r(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x} - f(\mathbf{x})) \quad \text{dla pewnej liczby } \lambda > 0.$$

Uzyskalibyśmy w ten sposób funkcję ciągłą $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ spełniającą $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ dla każdego $\mathbf{x} \in S^{n-1}$; odwzorowania takie nazywamy *retrakcjami*. Twierdzenie Brouwera często więc formułuje się następująco:

Twierdzenie 2. Nie istnieje retrakcja kuli D^n na sferę S^{n-1} .

Znanych jest wiele dowodów tego twierdzenia, ale nas interesuje ten, który najlepiej ilustruje metodę zmiany kategorii. Polega on na zapisaniu własności topologicznych danej przestrzeni (dysku, okręgu itp.) w języku algebraicznym, co odbywa się dzięki zdefiniowaniu ciągu funktorów, danych przez tzw. grupy homologii, między kategorią przestrzeni topologicznych a kategorią grup abelowych. Ich rola to zakodowanie własności związanych ze spójnością, czy też liczbą i rozmieszczeniem dziur w danej przestrzeni topologicznej. Idea ta stanowi fundament potężnej gałęzi matematyki zwanej topologią algebraiczną, a homologiczny dowód twierdzenia Brouwera jest sztandarowym przykładem jej zastosowania.

Zatrzymajmy się na przypadku $n = 2$. Przypuśćmy, że mamy do dyspozycji pewien kowariantny funktor $\pi_1: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G}$, z kategorii przestrzeni topologicznych do kategorii grup, dla którego $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ oraz $\pi_1(D^2) = 0$. Taka sytuacja natychmiast rozwiązywałaby sprawę. Rzeczywiście, jeśli $i: S^1 \hookrightarrow D^2$ jest identyficyzacyjnym włożeniem, a $r: D^2 \rightarrow S^1$ byłaby domniemaną retrakcją, to $r \circ i$ byłoby identyficyzacyjną na S^1 , a z własności funktorialnych π_1 wynikałoby, że odpowiadająca jej identyficyzacja na $\mathbb{Z} = \pi_1(S^1)$ jest złożeniem pewnych dwóch izomorfizmów $\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$. Jest to niedorzeczność, jako że każde takie złożenie musi być zerowe. Jak jednak określić funktor π_1 ?

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. W zbiorze wszystkich krzywych (ciągłych obrazów odcinka) leżących w X wprowadzamy relację *homotopijnej równoważności*: mówimy, że krzywe $\varphi_0, \varphi_1: [\alpha, \beta] \rightarrow X$ są równoważne i piszemy $\varphi_0 \sim \varphi_1$, jeżeli istnieje taka ciągła funkcja $H: [\alpha, \beta] \times [0, 1] \rightarrow X$, że $H(t, 0) \equiv \varphi_0(t)$, $H(t, 1) \equiv \varphi_1(t)$, a także $H(\alpha, s) = \varphi_0(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$ i $H(\beta, s) = \varphi_0(\beta) = \varphi_1(\beta)$ dla każdego $s \in [0, 1]$. Innymi słowy, $\varphi_0 \sim \varphi_1$, jeżeli jedną z tych krzywych da się w sposób ciągły zdeformować w drugą bez poruszenia końców. W sposób naturalny określa się konkatenację (zlepianie) $\varphi_0 \star \varphi_1$ dwóch krzywych, która jest także krzywą, oczywiście pod warunkiem, że koniec pierwszej pokrywa się z początkiem drugiej.

Zmieniając zaś kierunek przebiegu parametru danej krzywej φ otrzymujemy nową krzywą φ^{-1} . Przy dowolnie ustalonym punkcie $x_0 \in X$ niech \mathcal{K}_{x_0} będzie zbiorem wszystkich krzywych zamkniętych w X , których punktem początkowym i końcowym jest x_0 . Obydwie operacje \star i $(\cdot)^{-1}$ dają się naturalnie przenieść na rodzinę homotopijnych klas równoważności zbioru \mathcal{K}_{x_0} i, co więcej, struktura $(\mathcal{K}_{x_0}/\sim, \star, (\cdot)^{-1})$ okazuje się być grupą. Nazywamy ją *grupą podstawową* (lub *grupą Poincarégo*) przestrzeni X z punktem bazowym x_0 i oznaczamy symbolem $\pi_1(X, x_0)$.

Aby mówić o funktorze, należy jeszcze określić jak zachowują się odpowiednie morfizmy. Definicja jest naturalna – jeżeli $f: X \rightarrow Y$ jest funkcją ciągłą, a $\varphi_0 \sim \varphi_1$ są krzywymi w X , to $f \circ \varphi_0 \sim f \circ \varphi_1$. Możemy zatem w poprawny sposób zdefiniować $f_*([\varphi]_{\sim})$ jako $[f \circ \varphi]_{\sim}$, co daje nam homomorfizm grup $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$. Mówiąc precyzyjnie, tak określone π_1 jest wówczas funktorem działającym na kategorii przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem, gdzie morfizmami są odwzorowania ciągłe przeprowadzające punkty bazowe na siebie.

Konieczność wyboru punktów bazowych w zastosowaniach nie stanowi na ogół problemu. Rozważając dane odwzorowanie ciągłe $f: X \rightarrow Y$ zawsze możemy przecież wybrać dowolnie $x_0 \in X$, natomiast w roli punktu bazowego Y wziąć $f(x_0)$ i wówczas f staje się pełnoprawnym morfizmem. Można tak zrobić np. w przypadku retrakcji r w przedstawionym wyżej dowodzie twierdzenia Brouwera dla $n = 2$. Ponadto okazuje się, że jeżeli X jest łukowo spójna, a $x, y \in X$, to grupy $\pi_1(X, x)$ i $\pi_1(X, y)$ są izomorficzne (choć na ogół nie istnieje żaden jeden, kanoniczny izomorfizm działający dla wszystkich punktów $x, y \in X$). Z tego powodu często piszemy po prostu $\pi_1(X)$ zamiast $\pi_1(X, x_0)$.

To, że $\pi_1(D^2) = 0$, jest w miarę oczywiste – wszystkie krzywe zamknięte są bowiem homotopijnie ściągalne do punktu (jest to też prawdą dla dowolnego zbioru wypukłego, a nawet ogólniej – gwiaździstego). Równość $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ wymaga natomiast dowodu, ale jest intuicyjnie jasna. Dwie krzywe zamknięte w S^1 są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy tyle samo razy okrążają początek układu współrzędnych (licząc w ustalonym kierunku), a więc klasa abstrakcji, do której dana krzywa należy, wyznaczona jest przez liczbę okrążeń, czyli element grupy \mathbb{Z} . I tak metoda zmiany kategorii pozwala udowodnić twierdzenie Brouwera na płaszczyźnie.

Dla większych wartości n całe rozumowanie jest nieco bardziej skomplikowane i opiera się na funktorach odpowiadających kolejnym grupy homologii $H_n(X)$ ($n \in \mathbb{N}$) danej przestrzeni topologicznej X . Dla $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego podzbioru wypukłego (ogólniej: gwiaździstego) D przestrzeni euklidesowej mamy $H_n(D) = 0$; w szczególności $H_n(D^n) = 0$. Jeżeli zaś

chodzi o sferę, to dla $i, n \in \mathbb{N}$ mamy

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{jeżeli } i = n \\ 0, & \text{jeżeli } i \neq n \end{cases}$$

(zainteresowany szczegółami czytelnik może sięgnąć np. po książkę [4]). Posługując się funktorem homologii o odpowiednim numerze, można więc wykazać twierdzenie Brouwera w dowolnym wymiarze – zupełnie tak, jak zrobiliśmy to w przypadku płaszczyzny.*

Przedstawiliśmy kilka przykładów ilustrujących to, że metoda zmiany kategorii może zarówno być pomocna przy rozwiązywaniu zadań olimpijskich, jak i nawet stać się asumptem do rozwoju osobnych gałęzi matematyki. I to pomimo, a może właśnie z powodu, swojej ogólności. Jeżeli czegoś nas ta lekcja uczy, to chyba tego, by nie lekceważyć prawd natury ogólnej. Mogą nas czasem zaprowadzić do zaskakująco konkretnych wniosków.

Literatura

- [1] W. Arveson, *An invitation to C^* -algebras*, Graduate Texts in Mathematics 39, Springer-Verlag 1976.
- [2] V. Kovač, *Past proposals for high school and college student math competitions*, <http://web.math.pmf.unizg.hr/~vjekovac>
- [3] M.E. Kuczma, *Klub 44M* (zadanie 611), Delta 12 (439) 2010.
- [4] W.S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics 127, Springer-Verlag 1991.

Tomasz Kochanek
Instytut Matematyczny
Polska Akademia Nauk

*Grupa podstawowa, której użyliśmy wcześniej, związana jest z pierwszą grupą homologii w ten sposób, że $H_1(X)$ jest izomorficzna z grupą $\pi_1(X)$ zilorazowaną przez swój komutant $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$, czyli – z uprzemiennieniem grupy $\pi_1(X)$. Ładnym przykładem jest butelka Kleina K , dla której mamy $\pi_1(K) = (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle$ (iloraz grupy wolnej o generatorach a i b), natomiast $H_1(K) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

[Mądre Książki]

JOANNA ZWIERZYŃSKA

Czym zajmuje się obecnie nauka? Kto wynalazł skaner, a kto odkrył DNA? Jak to się stało, że komuś przyszło na myśl zaproponowanie akurat takiego modelu atomu? Czy matematyka to – jak ma wrażenie zapewne większość uczniów – wyłącznie liczenie, a historia – uczelnie się na pamięć dat? Ciekawe mówienie o nauce nie jest proste. Mało też na nie miejsca podczas szkolnych lekcji. Większość osób kończy zatem edukację szkolną, nie wiedząc w zasadzie niemal nic o współczesnej nauce. Na szczęście od kilku lat coraz modniejsza staje się w Polsce popularyzacja nauki: w księgarniach pojawiły się całe regały barwnych, zachęcających do wzięcia w rękę książek popularnonaukowych, adresowanych do osób w każdym wieku i o każdym poziomie wiedzy. Problem zatem w znacznej mierze rozwiązany – gdy tylko zechcę dowiedzieć się czegoś o pierwszej wojnie punickiej, wystarczy, że wpiszę odpowiednie hasło w wyszukiwarkę i zaraz znajdę odpowiednią książkę... Czy jednak na pewno? Czytelnik, który dopiero chce się czegoś dowiedzieć, to czytelnik w pewnym sensie bezbronny. Skąd bowiem ma wiedzieć, czy to, co napisano w losowo wziętej z półki publikacji, to prawda? Książka może być atrakcyjna, napisana świetnym językiem i pięknie wydana, ale skąd wiadomo, że to, co w środku, jest merytorycznie poprawne?

Można sprawdzić, kim jest autor książki – nazwisko wybitnego naukowca powinno gwarantować wysoką jakość merytoryczną. W przypadku publikacji tłumaczonych dochodzi jednak kwestia przekładu, podczas której można niemal na każdej stronie wprowadzić błąd merytoryczny, którego w oryginale nie było (mam taką książkę w domu). Czy jednak ktoś niebędący wybitnym naukowcem nie może napisać dobrej książki? Albo też: czy świetny uczonec musi mieć talent do przystępnego i ciekawego opowiadania o tym, czym się zajmuje? Wszak gdy sięgamy po książkę, by czytać ją w wolnym czasie, oprócz dawki wiedzy oczekujemy też przyjemności; atrakcyjność treści to jedna z najważniejszych cech dobrej popularyzacji nauki. Rozwiązanie problemu wyboru dobrej książki wymyślili dwaj przyjaciele, Leszek Szumlas i Piotr Kołodziejczyk – archeolodzy, pasjonaci literatury popularnonaukowej. Około półtora roku temu stworzyli niekomercyjny serwis internetowy Mądre Książki (www.madreksiazki.org), a do współpracy zaprosili znajomych i nieznajomych, specjalizujących się w różnych dziedzinach nauki.

Co Mądre Książki mówią same o sobie? Zobaczmy: *Księgarnie i biblioteki pełne są kolorowych książek popularnonaukowych o chwytliwych tytułach oraz entuzjastycznych recenzjach umieszczonych na obwolutach przez specjalistów od marketingu. Niestety część z tych publikacji zawiera błędy edytorskie, merytoryczne lub promuje pseudonaukowe teorie i nierzetelne badania. W gąszczu tysięcy dostępnych książek coraz trudniej znaleźć te, które są naprawdę wartościowe!*

Z tego powodu powstały Mądre Książki – niekomercyjny serwis założony przez pasjonatów popularyzacji nauki. Wierzymy, że opracowywane przez nas recenzje pomogą rozpoznać pozycje popularnonaukowe, które warte są przeczytania. W Mądrych Książkach znajdziesz m.in. informacje o treści książki, jej wartości merytorycznej i dowiesz się dla jakiej grupy wiekowej jest przeznaczona.

Ocena książek w naszym rankingu ma za zadanie pomóc rodzicom zainteresować dzieci wartościową lekturą, nauczycielom ułatwić pracę i wskazać ciekawe materiały pomocnicze, a wszystkim zainteresowanym wzbogaceniem własnej wiedzy dać okazję do poznania nowych lektur.

Polecając Wam daną książkę, największą uwagę zwracamy na jej poprawność merytoryczną, sposób prezentowania tematów oraz ukierunkowanie dla konkretnej grupy wiekowej. Staramy się wybierać pozycje pod każdym względem wartościowe, a także właściwie dostosowane do możliwości, potrzeb i zainteresowań różnych grup wiekowych. Książki oceniają fachowcy (naukowcy) oraz pasjonaci mogący pochwalić się rzetelnymi osiągnięciami w danej dziedzinie.

Nowe recenzje dodawane są niemal codziennie. Piszą je osoby mogące pochwalić się co najmniej magisterium z danej dziedziny, a nierzadko doktoratem. Wszyscy angażują się w działalność portalu *pro bono* – ta niezależność przekłada się między innymi na różnorodność wystawianych ocen. Mamy więc wreszcie serwis z recenzjami, a nie uprzejmymi, ale jednak niezbyt przydatnymi laurkami. Co więcej, każda recenzja podpisana jest imieniem i nazwiskiem jej autora, który tym samym w pełni odpowiada za wystawioną ocenę. Dla wygody recenzje podzielono na poszczególne kategorie – tak tematyczne, jak wiekowe.

Mądre Książki to obecnie największy serwis internetowy dotyczący literatury popularnonaukowej w Polsce. Zaangażowałam się w niego niemal od samego początku – i nie żałuję. Powstaje świetna, coraz obszerniejsza baza recenzji książek popularnonaukowych. Każdego więc, komu przyjdzie ochota poczytać o Sparcie, naczelnych lub kolorach, zachęcam do zajrzenia na www.madreksiadzki.org!

[Z listów do Redakcji]

Dostaliśmy przemiły e-mail od Michała Kremzera – twórcy wielu ciekawych zadań dla uczniów i pasjonatów matematyki, autora wydanej niedawno nakładem Wydawnictwa Nowik książki *Pamiętniki matematyczne. Zadania i ciekawostki dla uczniów gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych* (ISBN 83-62687-75-4). E-mail, a w nim: zadania! Jak ich Autor sam pisze:

Zadania są nietypowe, nie bardzo trudne, dla studentów i licealistów. Zadania są mojego autorstwa, nie publikowałem ich nigdzie wcześniej. Układanie zadań i ciekawostek matematycznych jest moją ogromną pasją.

Podzielając pasję Michała Kremzera do popularyzowania matematyki, z przyjemnością prezentujemy Państwu pierwszą część przesłanych zadań. Kolejne zadania pojawią się w następnym numerze [Macierzatora], wydawanym na Święto Liczby II i tym samym adresowanym szczególnie do uczniów.

Bardzo dziękujemy za ciekawe zadania, a Czytelników – zwłaszcza tych nieco młodszych – gorąco zachęcamy do zmierzenia się z postawionymi problemami! Może też ktoś z nauczycieli matematyki wykorzysta je na kółku matematycznym w szkole? Przedstawione pod zadaniami rozwiązania również są autorstwa Michała Kremzera.

Ciągi sum i iloczynów

Czy istnieją liczby całkowite a, b, c, d, e, f parami różne i takie, że ciągi $(a + b, c + d, e + f)$ oraz (ab, cd, ef) są rosnącymi ciągami arytmetycznymi?

Podział prostokąta

Prostokąt o bokach długości 9 i 10 podzielić na trzy prostokąty podobne, ale nie przystające.

Stały NWD i stała NWW

1) Czy istnieje taki nieskończony podzbiór zbioru liczb naturalnych złożonych, że $NWD(a, b)$ jest taki sam dla każdej pary różnych liczb a i b z tego podzbioru?

2) Czy istnieje taki czteroelementowy podzbiór zbioru liczb naturalnych, że $NWW(a, b)$ jest taka sama dla każdej pary różnych liczb a i b z tego podzbioru?

Rosnące ciągi geometryczne

1) Podać przykład pięciowyrazowego i rosnącego ciągu geometrycznego, w którym wszystkie wyrazy są kwadratami liczb naturalnych.

2) Podać przykład pięciowyrazowego i rosnącego ciągu geometrycznego, w którym dokładnie trzy wyrazy są kwadratami liczb naturalnych.

3) Podać przykład czterowyrazowego i rosnącego ciągu geometrycznego, w którym dokładnie trzy wyrazy należą do przedziału $[0, 1]$.

4) Podać przykład nieskończonego i rosnącego ciągu geometrycznego o całkowitych wyrazach, w którym wszystkie wyrazy oprócz jednego są podzielne przez 5.

5) Podać przykład nieskończonego i rosnącego ciągu geometrycznego, w którym dokładnie dwa wyrazy są liczbami całkowitymi.

6) Czy istnieje taka liczba dodatnia a , że ciąg $(a, 2a, 3a)$ jest rosnącym ciągiem geometrycznym?

7) Czy istnieją takie liczby dodatnie a i b , że ciąg $(a-b, ab, a)$ jest rosnącym ciągiem geometrycznym?

Rozwiązania:

CIĄGI SUM I ILOCZYNÓW: *Tak, np. $a = 1, b = -10, c = 4, d = 5, e = 2, f = 25$.*

Dodatkowe pytanie do Czytelników: Czy istnieją liczby naturalne dodatnie, parami różne i spełniające warunki zadania?

PODZIAŁ PROSTOKĄTA: *Wierzchołki prostokąta o bokach 9 i 10 znajdują się w punktach: $(0, 0), (9, 0), (9, 10), (0, 10)$. Wierzchołki pierwszego prostokąta z podziału są natomiast w punktach $(0, 8), (4, 8), (4, 10), (0, 10)$, drugiego w punktach $(0, 8), (4, 8), (4, 0), (0, 0)$, a trzeciego w punktach $(4, 0), (9, 0), (9, 10)$ i $(4, 10)$.*

STAŁY NWD I STAŁA NWW:

1) *Tak, np. zbiór pięciokrotności liczb pierwszych.*

2) *Tak, np. zbiór $\{6, 10, 15, 30\}$.*

Dodatkowe pytanie do Czytelników: Czy istnieje pięcioelementowy zbiór spełniający warunki podpunktu 2?

ROSNĄCE CIĄGI GEOMETRYCZNE:

1) $(1, 4, 16, 64, 256)$.

2) $(1, 2, 4, 8, 16)$.

3) $(\frac{1}{32}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 2)$.

4) Ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 2 i ilorazie równym 5.

5) Ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 3 i ilorazie równym $\frac{4}{3}$.

6) Nie. Wynika to z definicji ciągu geometrycznego.

7) Tak. Np. $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{2}$.

[Wstęp do fizyki laserów]

BARTOSZ SZÓSTAK

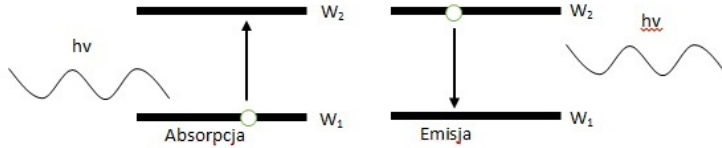
Nie jest tajemnicą, że żyjemy w erze fali elektromagnetycznych. Ludzkość zaczęła je wykorzystywać na szeroką skalę już na początku ubiegłego wieku, a nawet od połowy wieku XVIII, kiedy powstawały takie urządzenia jak radio, radar, x-ray oraz LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation).

To ostatnie urządzenie ma wiele zastosowań we współczesnym świecie, gdyż jest bardzo unikalnym źródłem promieniowania spójnego i wysoce ograniczającego rozbieżność fali różnych długości. W ostatnim czasie lasery wykorzystuje się do konstrukcji drukarek 3D, np. w takich technologiach jak Shape Deposition Manufacturing (SDM), gdzie przy pomocy frezarki (najczęściej pięcioosiowej) tworzy się różne kształty z proszku metalowego. Rozwój druku 3D, zwłaszcza druku w metalu, skłonił mnie do zainteresowania się tym, w jaki sposób działa laser oraz w jaki sposób można najlepiej wykorzystać jego właściwości.

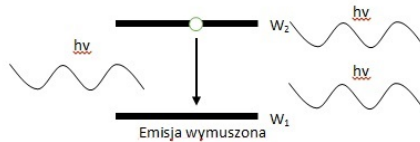
Historia wykorzystywania światła sięga jeszcze starożytnej Grecji, a nawet – wcześniejszych czasów, kiedy to ludzkość zaczęła tworzyć podwaliny nauki nazywanej obecnie optyką. Moment przełomowy dla technologii związanej z laserami nastąpił jednak o wiele później, bo w roku 1917. Wtedy to Albert Einstein opublikował pracę naukową na temat spontanicznej oraz wymuszonej emisji i absorpcji promieniowania elektromagnetycznego.

Absorpcja oraz emisja spontaniczna oraz wymuszona

Weźmy pod uwagę dwa poziomy energetyczne (termy) w atomie lub jonie, W_1 i W_2 , oraz elektron, który znajduje się na niższym poziomie energetycznym W_1 . Jeszcze przed Einsteinem wiadomo było, że foton mający odpowiednią energię, równą $h\nu = W_1 - W_2$ (gdzie h równe jest stałej Plancka (którą Einstein wyprowadził z teorii promieniowania ciała doskonale czarnego), a ν oznacza częstotliwość drgań w fali elektromagnetycznej) może wzbudzić elektron tak, że przejdzie on z niższego poziomu na wyższy i w drugą stronę; elektron przechodzący z wyższego poziomu na niższy emituje promieniowanie równe $h\nu$. Równanie to opisuje tzw. prawo Bohra, a zjawiska związane z przechodzeniem elektronu nazywają się absorpcją (gdy atom absorbuje foton) bądź emisją (gdy elektron, zmieniając poziom energetyczny, na którym się znajduje, na niższy, emituje foton) spontaniczną.



Einstein odkrył jeszcze jeden rodzaj emisji, tym razem wymuszonej. Zastanawiał się nad tym, co się stanie, gdy na już pobudzony elektron w atomie wyślemy kolejny foton. Zjawisko emisji wymuszonej polega na jednoczesnej absorpcji energii fotonu i natychmiastowej emisji dwóch kolejnych, z których jeden jest fotonem pierwotnie wysyłanym na atom.



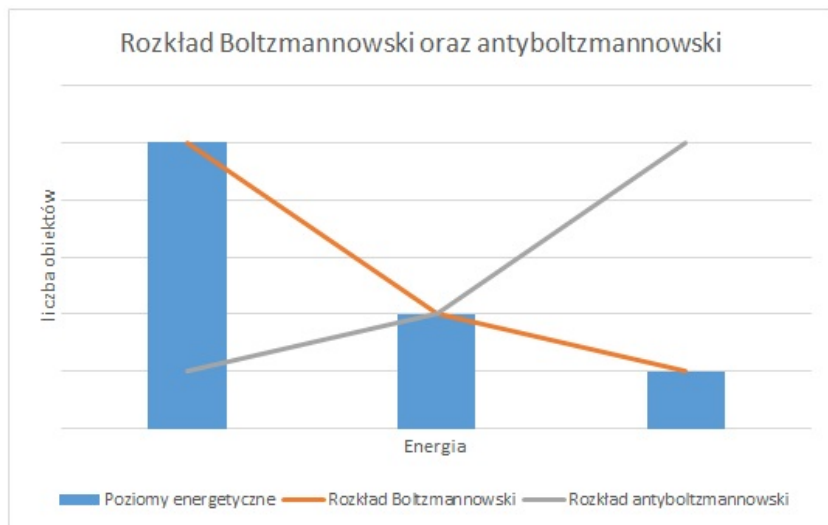
W ten sposób z pobudzonego atomu można, kosztem energii wzbudzonego atomu lub molekuly, uzyskać dwa kwanty promieniowania $h\nu$. Warto zauważyć, że wyemitowane fotony mogą następnie wywoływać kolejne emisje wymuszone na atomach, na jakie trafią. Emisję wymuszoną wykorzystuje się właśnie do wywoływania akcji laserowej.

Oczywiście w rzeczywistości wywołanie emisji wymuszonej w grupie atomów nie jest takie proste. Częściej występują atomy mające elektrony niepobudzone, na niższych poziomach energetycznych. Prawo Boltzmana, podstawowe prawo termodynamiki, mówi, że gdy grupa atomów jest w równowadze termalnej, to relatywna populacja dwóch poziomów energetycznych jest opisana wzorem:

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{W_2 - W_1}{kT}\right),$$

gdzie N_2 i N_1 oznaczają populacje elektronów na, odpowiednio, wyższym i niższym poziomie energetycznym, T oznacza równowagę temperatury, a k to stała Boltzmana.

Ani akcja laserowa, ani też maserowa nie może zostać przeprowadzona w takich warunkach. Do akcji tych wymagane jest zaistnienie rozkładu antyboltzmannowskiego, czyli stanu, w którym – na pewien ograniczony czas – więcej elektronów w atomach znajduje się na wyższych poziomach energetycznych.

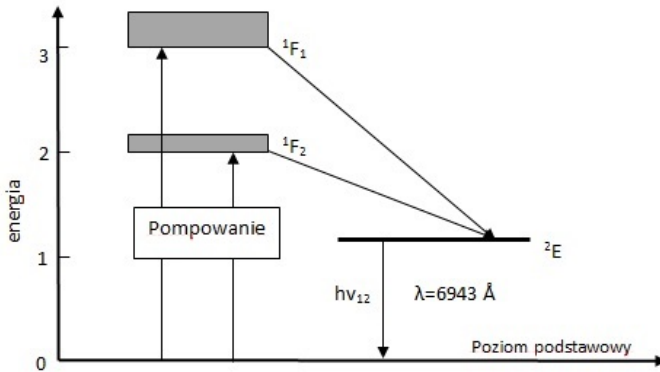


Lasery rubinowy

Rozkład antyboltzmannowski można stosunkowo łatwo uzyskać, wykorzystując sprzężenie zwrotne. Przedstawię to na przykładzie lasera rubinowego, skonstruowanego w roku 1960 przez Theodore'a Maimana. Laser rubinowy ma rdzeń rubinowy, a otoczony jest wokół lampą ksenonową pobudzającą elektrony w rubinie, a dokładniej w jonach chromu Cr^{3+} . Wykorzystuje się w nim model trójpoziomowy, w którym występują trzy poziomy energetyczne: 1F_1 , 1F_2 oraz 2E (metatrwały). „Metatrwały” oznacza, że elektrony utrzymują się na nim stosunkowo długo.

Po obu stronach rubinu umieszczone są zwierciadła (jedno całkowicie odbijające, a drugie półprzepuszczalne, aby wiązka światła miała się gdzieś wydostać); stanowią one komorę rezonansową. Po naświetleniu rubinu lampą ksenonową wywołują one falę stojącą fotonów. Proces wywoływania tej fali nazywa się „pompowaniem optycznym”, którego celem jest doprowadzenie do tego, aby powstał rozkład antyboltzmannowski i aby jak największa ilość elektronów znalazła się na metatrwałym poziomie 2E .

W ten sposób elektrony gromadzą się na metatrwałym poziomie, a przechodząc z niego na poziom podstawowy, wywołują akcje laserową, tzn. wytwarzają spójne, monochromatyczne światło o częstotliwości $\lambda = 6943 \text{ \AA}$.



W przeciwieństwie do dotychczasowych źródeł światła, takich jak słońce czy lampa, laser wytwarza spójne światło, które od niespójnego różni się tym, że pozostaje ze sobą w relacji przestrzennej oraz czasowej. Światło spójne może być także monochromatyczne. Oznacza to, że wiązka światła lasera wypromieniowana zostaje w postaci linii 6943Å o linii spektralnej równej jedynie $0,02\text{Å}$. W porównaniu z linią spektralną słońca (wynoszącą od 4000 do 8000Å) jest to niesłychanie mała wartość, stwarzająca olbrzymie możliwości m.in. w radiotechnice. Warto także dodać, że lasery działają mogą ciągle, jak lasery gazowe, lub impulsowo. Laser rubinowy działa impulsowo, wypromieniowując jednorazowo. Energia zawarta w rubinie na skutek promieniowania wynosi zaledwie 10J , a wyładowana w ciągu pół milisekundy daje moc

$$M = \frac{(10\text{ J})}{(0.0005\text{ s})} = 20000\text{ J/s.}$$

Artykuł ten nie jest nawet szczytem góry lodowej całości wiedzy z zakresu fizyki laserów; jest on jedynie szczytem wstępu. Przed każdym chętnym rozciąga się olbrzymie królestwo różnych rodzajów laserów, takich jak lasery gazowe, cieczowe, ekscymerowe, półprzewodnikowe, olbrzymia ilość dziedzin i zjawisk jak optyka nieliniowa, druga harmoniczna, wymuszone rozpraszanie Ramana. Do zrozumienia tego wszystkiego polecam sięgnąć po książki:

- *Nowe oblicze optyki* Arkadiusza Piekary;
- *Wstęp do fizyki laserów* Franciszka Kaczmarska;
- oraz wszystkie publikacje Anthony'ego Siegmana, zwłaszcza książkę o tytule *Lasers*.

[Matematyczny święty Graal Andrew Wilesa]

KAMILA BRODA

Moje własne doświadczenia z uprawiania matematyki można chyba najlepiej oddać, porównując je do zwiedzania ciemnego gmaszyska. Wchodzę do pierwszego pokoju: jest ciemno, zupełnie ciemno. Dreczę w kółko i wpadam na meble, dowiadując się stopniowo, gdzie są ustawione. Po jakichś sześciu miesiącach znajduję wyłącznik i naciskam go. Światło zalewa nagle wszystko i wreszcie mogę zobaczyć, gdzie jestem. A potem wchodzę do następnego ciemnego pokoju...

Tymi właśnie słowami profesor Andrew Wiles opisał swoje siedmioletnie poszukiwania dowodu twierdzenia, że równanie $x^n + y^n = z^n$ nie ma żadnych rozwiązań całkowitych dodatnich, gdy n jest większe od 2, zwanego wielkim twierdzeniem Fermata.

Fermat, choć z zawodu prawnik, fascynował się dziełami matematycznymi starożytnych Greków. Spośród łacińskich przekładów starożytnych tekstów Fermat szczególnie upodobał sobie książkę pod tytułem *Arithmetica* autorstwa greckiego matematyka Diofantosa. Na własnym egzemplarzu tego dzieła, zaraz obok stwierdzenia o rozkładaniu kwadratu liczby na sumę dwóch kwadratów, około roku 1637 Fermat umieścił krótką notatkę:

Wiadomo, że nie można rozłożyć sześcianu na dwa sześciany ani bikwadratu na dwa bikwadraty, ani żadnej potęgi, oprócz kwadratu, na dwie inne potęgi o tym samym wykładniku. Odkryłem prawdziwie cudowny dowód tego faktu, jednakże ten margines jest zbyt wąski, by go zmieścić.

Długa droga Wilesa

Lata zmagania, godziny samotności spędzone na własnym poddaszu przyniosły w końcu długo wyczekiwany efekt. Jednak wszyscy powinniśmy wiedzieć, że dowód wielkiego twierdzenia Fermata to nie praca jednego matematyka. Na równi z Wilesem laury należą się także Kenowi Ribetowi, Barry'emu Mazurowi, Goro Shimurze, Yutace Taniyamie, Gerhardowi Freyowi i wielu, wielu innym, którzy przyczynili się stworzenia do wyczekiwanego około 350 lat dowodu.

W środę 23 czerwca 1993 roku na konferencji w Cambridge Wiles przedstawił efekty swojej długoletniej pracy, przez co wśród matematyków zapanał optymizm, a sam Wiles w ciągu jednej nocy trafił na pierwsze strony gazet. Radość trwała krótko. Po kilku tygodniach w rozumowaniu Wilesa

wykryto lukę. Naukowiec wrócił na swój strych, pozostawiony sam na sam ze swoim zadaniem.

Czas płynął. Dowodu nie było. Matematycy zaczęli zastanawiać się, czy wielkie twierdzenie Fermata w ogóle jest prawdziwe. Bo chociaż Wiles zdołał na chwilę przekonać świat, to jego dowód stał się nie bardziej rzeczywisty niż niemieszczący się na zbyt wąskim marginesie „prawdziwie cudowny dowód” Fermata.

W poniedziałkowy poranek 19 września 1994 roku Wiles, siedząc przy swoim biurku na Uniwersytecie w Princeton, postanowił, że zanim porzuci wszelkie nadzieje, zerknie ostatni raz na swój dowód. Studiował rozłożone na biurku papiery, koncentrując się bardzo mocno. I wtedy nagle zobaczył jak na dłoni, gdzie tkwił błąd. Opisał to wydarzenie słowami: *To była najważniejsza chwila w całym moim zawodowym życiu. Nagle, zupełnie nieoczekiwanie, naszło mnie to niewiarygodne objawienie.*

Wiles kilka godzin spacerował po wydziale, co pewien czas wracając do biurka i sprawdzając, czy jego znalezisko dalej jest na miejscu. Było. Wrócił więc do domu, postanawiając odpocząć. Po roku pełnym nieudanych prób bał się, że następnego dnia znajdzie w nowym rozumowaniu jakąś lukę. Rano wrócił do biurka, a jego klejnot po prostu czekał tam na niego. Wiles przepisał na czysto nowy dowód i w radosnym nastroju wysłał do innych matematyków jednobrzmiące wiadomości: *Spodziewaj się w najbliższych dniach przesyłki ekspresowej.* W następnych tygodniach matematycy sprawdzali wszystkie szczegóły. Nikt nie znalazł żadnego błędu. Recenzje jego pracy zabrały kilka miesięcy, lecz tym razem nie znaleziono żadnych usterek.

Czy Fermat rzeczywiście znał dowód?

Andrew Wiles opisuje swój dowód jako „dwudziestowieczny”. Wykorzystał osiągnięcia wielu matematyków XX wieku oraz prace kilku żyjących znacznie wcześniej. Możemy powiedzieć, że przeprowadzony przez Wilesa dowód wielkiego twierdzenia Fermata jest osiągnięciem sporej grupy matematyków.

Według Wilesa, Fermat nie mógł znać dowodu, gdy umieszczał na marginesie swoją sławną notatkę. Nie wiemy jednak tego na pewno. Potrafimy tylko powiedzieć, że twierdzenie zostało w końcu udowodnione, a każdy jego szczegół został sprawdzony przez dziesiątki matematyków na całym świecie. Możliwe, że Fermat znał mnóstwo faktów należących do „współczesnej” matematyki. A to, czy rzeczywiście odkrył „prawdziwie cudowny dowód”, pozostanie na zawsze jego tajemnicą.

[Święto Liczby II 2015]

W poniedziałek i wtorek, 14 i 15 marca 2016, na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach odbędzie się już dziesiąte Święto Liczby II. Data wybrana jest nieprzypadkowo – 14 marca to w notacji amerykańskiej $3/14$. Dla miłośników matematyki, ale i dla tych, którzy do matematyki dopiero chcieliby się przekonać, szykujemy wykłady, warsztaty, konkursy.

Chętnych w każdym wieku zachęcamy do posłuchania czegoś o matematyce, zmierzenia się z zagadkami i zabawkami logicznymi (kto nie chciałby złożyć trójwymiarowych puzzli?), zajrzenia do Kawiarni Szkockiej, wypróbowania zasad rachunku prawdopodobieństwa w praktyce w kasynie, stworzenia pięknych figur z origami czy posłuchania o fraktalach. Na chętnych czekać też będą warsztaty komputerowe, w tym szyfrowanie.

I jak co roku – serdecznie zachęcamy studentów do zaangażowania się w organizację Święta Liczby II. Masz nowy pomysł na ciekawe zajęcia? Podobały Ci się szczególnie jakieś warsztaty i chciał(a)byś je poprowadzić? A może po prostu chętnie pomożesz, ale nie masz pomysłu, w czym? Przyjdź lub napisz do nas! Każda osoba jest bardzo mile widziana. Czekamy na Ciebie w pokoju KNM (524 w Instytucie Matematyki). Możesz też napisać do mnie e-mail: j.zwierzynska@knm.katowice.pl.

Wiecej informacji pojawi się w lutym na stronie www.swietopi.pl.

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelny: Joanna Zwierzyńska

Autorzy artykułów:

Prof. dr hab. Józef Przytycki (George Washington University),

dr Tomasz Kochanek (Polska Akademia Nauk),

Kamila Broda, Michał Kremzer,

Bartosz Szóstak, Joanna Zwierzyńska

Skład i łamanie w \LaTeX : Joanna Zwierzyńska

Kontakt z redakcją: bezpośrednio w pokoju KNM (p. 524)

lub elektronicznie: macierzator@knm.katowice.pl

Archiwalne numery [MACIERZATORA] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: www.knm.katowice.pl.
Wydanie elektroniczne [MACIERZATORA] ma numer ISSN: 2083-9774.