Uniwersytet Śląski
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

Kryterium stopniowe zbieżności szeregów

Autor: Mateusz Szymański

18 stycznia 2013

Streszczenie

W tym miejscu udowodnimy wygodne twierdzenie pozwalające efektywnie badać zbieżność szeregów wyrażeń wymiernych, będących ilorazem wielomianów (rozszerzonym o wykładniki rzeczywiste). Istota kryterium polega na wyznaczeniu stopnia wyrażenia i porównaniu go z wartością zbieżności szeregów.

Oznaczenie

Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$\mathfrak{P} = \left\{ f : f(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^{p_k}}{\sum\limits_{j=1}^{m} b_j x^{q_j}}, a_k, b_j, p_k, q_j \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Przyjmijmy, że $p_{k_1} = p_{k_2} \Rightarrow k_1 = k_2$ oraz $q_{j_1} = q_{j_2} \Rightarrow j_1 = j_2$. Zauważmy, że dziedziną $f \in \mathfrak{P}$ jest $\mathbb{R}$ bez co najwyżej skończonej liczby punktów, tj. pierwiastków mianownika. Oznaczmy także:

$$\deg f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln |f(x)|}{\ln x}$$

Dla $f \in \mathfrak{P}$ ta granica zawsze jest właściwa, o ile $f \not\equiv 0$, wtedy możemy przyjąć $\deg f(x) = -\infty$.

Lemat. Niech $0 \not\equiv f, g \in \mathfrak{P}$. Jeżeli istnieje $X \in \mathbb{R}$, że $|f(x)| < |g(x)|$ dla $x > X$, to zachodzi:

$$\deg f(x) \leqslant \deg g(x)$$

Dowód. Jeżeli istnieje $X \in \mathbb{R}$, że $|f(x)| < |g(x)|$ dla $x > X$, to:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|g(x)|}{|f(x)|} \geqslant 1$$

Korzystając z tego oraz zbieżności stopnia f, g:

$$\deg g(x) - \deg f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln |g(x)|}{\ln x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln |f(x)|}{\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln |g(x)| - \ln |f(x)|}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \frac{|g(x)|}{|f(x)|}}{\ln x} \geqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 1}{\ln x} = 0$$

Stąd teza. □

Twierdzenie. Niech $f \in \mathfrak{P}$ będzie funkcją dobrze określoną dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\deg f < -1$.

Dowód. Korzystając z postaci ogólnej, przyjmijmy $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dla $P(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^{p_k}$, $Q(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j x^{q_j}$ przy założeniach z lematu. Ustalmy $p = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \{p_k\}$ oraz $q = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \{q_j\}$. Niech N będzie spełniało $p_N = p$ oraz M: $q_M = q$. Niech $f'(x) = \frac{a_N}{b_M} x^{p-q}$
Wtedy zachodzi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_N}{b_M} \frac{x^{p-q}}{f(x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x^{p-q} \frac{a_N}{b_M} \right) \cdot \frac{b_1 x^{q_1} + \ldots + b_M x^q + \ldots + b_m x^{q_n}}{a_1 x^{p_1} + \ldots + a_N x^p + \ldots + a_n x^{p_n}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x^{p-q} \frac{a_N}{b_M} \right) \cdot \frac{x^q \left(b_1 x^{q_1-q} + \ldots + b_M + \ldots + b_m x^{q_n-q}\right)}{x^p \left(a_1 x^{p_1-p} + \ldots + a_N + \ldots + a_n x^{p_n-p}\right)}$$

Przyjęliśmy p i q jako maksimum oraz założenie $p_{k_1} = p_{k_2} \Rightarrow k_1 = k_2$, $q_{j_1} = q_{j_2} \Rightarrow q_1 = q_2$, zatem $\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\forall} p_k < p$ i $\underset{1 \leqslant j \leqslant m}{\forall} q_j < q$, co implikuje:

$$\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\forall} k \neq N \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x^{p_k - p} = 0, \qquad \underset{1 \leqslant j \leqslant m}{\forall} j \neq M \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x^{q_j - q} = 0$$

Na mocy tego mamy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \left(x^{p-q} \frac{a_N}{b_M} \right) \cdot \frac{x^q \left(b_1 x^{q_1 - q} + \ldots + b_M + \ldots + b_m x^{q_n - q} \right)}{x^p \left(a_1 x^{p_1 - p} + \ldots + a_N + \ldots + a_n x^{p_n - p} \right)} = \\ = \lim_{x \to +\infty} \left(x^{p-q} \frac{a_N}{b_M} \right) \cdot \frac{x^q \left(b_1 \cdot 0 + \ldots + b_M + \ldots + b_m \cdot 0 \right)}{x^p \left(a_1 \cdot 0 + \ldots + a_N + \ldots + a_n \cdot 0 \right)} = \\ = \lim_{x \to +\infty} \left(x^{p-q} \frac{a_N}{b_M} \right) \cdot \frac{x^q b_M}{x^p a_N} = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Stąd, biorąc $f^*(x) = x^{p-q} \left| \frac{2a_N}{b_M} \right|$ oraz $f_*(x) = x^{p-q} \left| \frac{a_N}{2b_M} \right|$ mamy, iż:

$$\underset{X \in \mathbb{R}^+}{\exists} \underset{x > X}{\forall} f^*(x) > |f(x)| \wedge f_*(x) < |f(x)|$$

ponieważ na mocy (1):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f^*(x)}{|f(x)|} = 2, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{f_*(x)}{|f(x)|} = \frac{1}{2}$$

Stąd i z lematu mamy: $\deg f^*(x) \leqslant \deg f(x) \leqslant \deg f_*(x)$. Jeżeli $p - q \neq 0$, to:

$$\begin{aligned} \deg f^*(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \left(x^{p-q} \left| \frac{2a_N}{b_M} \right| \right)}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \left(x^{p-q} \left[\left| \frac{2a_N}{b_M} \right|^{\frac{1}{p-q}} \right]^{p-q} \right)}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} (p-q) \frac{\ln \left(x \left| \frac{2a_N}{b_M} \right|^{\frac{1}{p-q}} \right)}{\ln x} = \\ = (p-q) \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + \ln \left[\left| \frac{2a_N}{b_M} \right|^{\frac{1}{p-q}} \right]}{\ln x} = (p-q) \lim_{x \to +\infty} \left[1 + \frac{\ln \left[\left| \frac{2a_N}{b_M} \right|^{\frac{1}{p-q}} \right]}{\ln x} \right] = p - q \end{aligned}$$

Analogicznie $\deg f_*(x) = p - q$, zatem z twierdzenia o trzech ciągach

$$\deg f^*(x) = \deg f'(x) = \deg f(x) = \deg f_*(x)$$

Z kryterium porównawczego mamy, iż bezwzględna zbieżność $\sum_{n=1}^{+\infty} f^*(n)$ pociąga za sobą bezwzględną zbieżność $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$, natomiast rozbieżność $\sum_{n=1}^{+\infty} f_*(n)$ pociąga za sobą rozbieżność $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f^*(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-q} \left| \frac{2a_N}{b_M} \right| = \left| \frac{2a_N}{b_M} \right| \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-q}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_*(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-q} \left| \frac{a_N}{2b_M} \right| = \left| \frac{a_N}{2b_M} \right| \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p-q}$$

Jeżeli $\deg f(x) = p - q < -1$, to powyższy szereg jest zbieżny, natomiast dla $\deg f(x) \geqslant -1$ szereg jest rozbieżny. To kończy dowód. □

Uwaga

Możemy rozszerzyć zakres stosowania kryterium. Stopień wyrażenia postaci

$$f(x) = \sqrt[q]{x^{p_1} + x^{p_2} + \ldots + x^{p_n}}$$

liczymy jako $\deg f(x) = \dfrac{\max_{1 \leqslant k \leqslant n}\{p_k\}}{q}$.

Przykład. Zbadać zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\pi + 2n^e - 4n^{\sqrt{2}}}{n^{\sqrt{19}} - n^2 + 12n^{\sqrt{7}}}$$

$p = \pi$, $q = \sqrt{19}$, zatem stopień tego wyrażenia wynosi $\pi - \sqrt{19} \approx -1.2173 < -1$. Szereg jest zbieżny.

Uogólnienie. Można rozszerzyć to kryterium i sformułować je w sposób bardziej ogólny.

Twierdzenie. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Wtedy, jeżeli:

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln|a_n|}{\ln n} < -1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie,
2. $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln|a_n|}{\ln n} > -1$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny lub zbieżny warunkowo.

Dowód. Ustalmy ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Niech $a = \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln|a_n|}{\ln n}$ i $|a| < +\infty$.
Jeżeli $a < -1$, to istnieje $\varepsilon \in (a, -1)$. Korzystając z kryterium ilorazowego i szacując $|a_n|$ przez $n^{a+\frac{\varepsilon-a}{2}}$:

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{n^\varepsilon} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{a+\frac{\varepsilon-a}{2}}}{n^\varepsilon} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{a-\varepsilon}{2}} = 0$$

Szereg $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^\varepsilon$ jest zbieżny, a więc a_n także jest zbieżny. Dla $a > -1$, gdzie $a = \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln|a_n|}{\ln n}$, podobnie istnieje $\delta \in (-1, a)$, dla której spełnione jest:

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{n^\delta} \geqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{a-\frac{a-\delta}{2}}}{n^\delta} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{a-\delta}{2}} = +\infty$$

z czego wnioskujemy rozbieżność $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Dla $|a| = +\infty$ zbieżności/rozbieżności są oczywiste. $\square$

Uwaga

Można zwiększyć „czułość” kryterium, włączając kryterium zagęszczania, przy założeniu monotoniczności $f(n)$:

$$\deg_1 f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln|e^x f(e^x)|}{\ln x}, \quad \deg_2 f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln|e^{e^x} e^x f\left(e^{e^x}\right)|}{\ln x}$$

i ogólniej, gdzie $\exp^n(x)$ oznacza n-tą iterację funkcji $\exp(x) = e^x$:

$$\deg_n f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left|\left[\prod_{k=1}^{n} \exp^k(x)\right] f(\exp^n(x))\right|}{\ln x}$$

Kryterium nie rozstrzyga w dalszym ciągu, gdy $\deg_n f(x) = -1$. Dla funkcji określonych jedynie w zbiorze liczb naturalnych zamiast podstawy e można wybrać liczbę naturalną $n \in \mathbb{N}$.

Poniżej znajdują się dodatkowe uwagi, które ułatwiają liczenie stopni funkcji rzeczywistych.

Twierdzenie. Niech $f, g \in D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq \mathbb{R}$ zawiera przedział $(c, +\infty)$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$, a $|\deg f(x)|$, $|\deg g(x)| < +\infty$. Zachodzą następujące własności:

1. $\deg(p \cdot f(x)) = \deg f(x)$, $p \neq 0$,
   (*stopień funkcji przemnożonej przez skalar*),
2. $\deg [f(x) + g(x)] = \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$
   (*stopień sumy funkcji*),
3. $\deg [f(x) \cdot g(x)] = \deg f(x) + \deg g(x)$
   (*stopień iloczynu funkcji*),
4. $+\infty > \lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| > 0 \Rightarrow \deg f(x) = 0$
   (*stopień funkcji ograniczonej*),
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \deg f(x) = 1$
   (*stopień funkcji asymptotycznie liniowej*),
6. $\deg \ln^p x = 0$, $p \in \mathbb{R}$,
7. $\deg \sin(x^p) = p$, $\deg \sin(x^{-p}) = 0$, $p \leqslant 0$,
8. $\deg \operatorname{tg}(x^p) = p$, $p \leqslant 0$,
9. $\deg \operatorname{arctg}(x^p) = p$, $\deg \operatorname{arctg}(x^{-p}) = 0$, $p \leqslant 0$,
10. $\deg \arcsin(x^p) = p$, $p \leqslant 0$,
11. $\deg a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & a = 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$,
12. $\deg x! = +\infty$,
13. $\deg x^x = +\infty$, $\deg x^{-x} = -\infty$,
14. $\deg \ln x! = 1$,
15. $\deg \dfrac{e^x x!}{x^x} = \dfrac{1}{2}$.

Dowód.

1. Niech $p \neq 0$. Wtedy:

$$\deg(pf(x)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(|pf(x)|)}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(|f(x)|) + \ln|p|}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(|f(x)|)}{\ln x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|p|}{\ln x} = \deg f(x)$$

2.

$$\deg [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(|f(x)| + |g(x)|)}{\ln x} \geqslant \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\max\{|f(x)|, |g(x)|\})}{\ln x} = \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$$

Oszacowanie w drugą stronę daje tę samę granicę na mocy wniosku o stopniu funkcji przemnożonej przez skalar:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(|f(x)| + |g(x)|)}{\ln x} \leqslant \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2\max\{|f(x)|, |g(x)|\})}{\ln x} = \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$$

3.

$$\deg [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(f(x) \cdot g(x))}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln|f(x)|}{\ln x} + \frac{\ln|g(x)|}{\ln x} \right)$$

Korzystając ze zbieżności:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln|f(x)|}{\ln x} + \frac{\ln|g(x)|}{\ln x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|f(x)|}{\ln x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|g(x)|}{\ln x} = \deg f(x) + \deg g(x)$$

4. Niech $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = M \in \mathbb{R}^+$. Wtedy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|f(x)|}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln M}{\ln x} = 0$$

5. Niech $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, wtedy:

$$\deg f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|f(x)|}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left|x \cdot \frac{f(x)}{x}\right|}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + \ln\left|\frac{f(x)}{x}\right|}{\ln x} = 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left|\frac{f(x)}{x}\right|}{\ln x} = 1$$

6.

$$\deg \ln^p x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln|\ln^p x|}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} p \cdot \frac{\ln \ln x}{\ln x} = 0$$

7. Korzystając z własności $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$, oraz wniosku o stopniu funkcji asymptotycznie liniowej dla $p \leqslant 0$:

$$\deg \sin(x^p) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|\sin(x^p)|}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|\sin(x^p)|}{\frac{1}{p}\ln(x^p)} = p \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sin(x^p)}{\ln(x^p)} = p$$

Dla $p > 0$:

$$\deg \sin(x^p) = \left| \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|\sin x^p|}{\ln x} \right| \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 1}{\ln x} = 0$$

stąd $\deg \sin(x^p) = 0$.

8. Analogicznie jak poprzednio.
9. Jak wyżej.
10. Jak wyżej.
11. Dla $a > 1$:

$$\deg a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln a^x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} \ln a = +\infty$$

Gdy $a = 1$, to $\deg 1^x = \deg 1 = 0$, natomiast jeżeli $0 < a < 1$, to $\ln a < 0$:

$$\deg a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln a^x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} \ln a = -\infty$$

12. $\deg x! = +\infty$ wynika z dwóch oszacowań:

$$\deg x! = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x!}{\ln x} \geqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^{\sqrt{x}}}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} \cdot \frac{\ln x}{\ln x}\right) = +\infty$$

$$\deg x! = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x!}{\ln x} \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \frac{\ln x}{\ln x}\right) = +\infty$$

13.

$$\deg x^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{\ln x} = +\infty$$

$$\deg x^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^{-x}}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{x\ln x}{\ln x}\right) = -\infty$$

14. $\deg \ln x! = 1$ uzyskuje się, ponownie korzystając z oszacowań:

$$\deg \ln x! = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln x!}{\ln x} \geqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln(x^{\frac{x}{2}})}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2}x\ln x\right)}{\ln x} \geqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{1}{2}x}{\ln x} = 1$$

$$\deg \ln x! = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln x!}{\ln x} \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln(x^x)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x\ln x)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + \ln\ln x}{\ln x} = 1$$

15. Korzystając z oszacowania Stirlinga dla silni:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x!}{\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x} = 1$$

$$\deg \frac{e^x x!}{x^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{e^x x!}{x^x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{e^x\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x}{x^x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{2\pi x}\right)}{\ln x} = \frac{1}{2}$$

□