Uniwersytet Śląski
Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii

Uogólnienie systemu pozycyjnego

Autor: Mateusz Szymański

18 października 2013

Spis treści

1 Podstawowe pojęcia i zależności **2**
1.1 Systemy zgodne 3

2 Rozwinięcia skończone oraz nieskończone **4**
2.1 Charakterystyka systemów zgodnych 5

3 Arytmetyka w systemach zgodnych **6**
3.1 Dodawanie 6
3.2 Odejmowanie 7

4 Systemy absolutnie zgodne **7**

5 Systemy zdegenerowane **9**

6 Załączniki **10**

Streszczenie

W tym miejscu poznamy uogólnienie systemu pozycyjnego - a właściwie jedną z dróg rozszerzenia sposobu zapisu liczb rzeczywistych. Z pewnych względów zatrzymamy się na samej części ułamkowej dla liczb rzeczywistych dodatnich, tym niemniej jestem przekonany, iż Czytelnik po tym artykule będzie w stanie sam rozszerzyć poniższy koncept wedle własnych potrzeb i upodobań.

1 Podstawowe pojęcia i zależności

Niech dany będzie ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dla którego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty$$

Wówczas możemy zdefiniować **system pozycyjny** względem tego ciągu lub mówić krótko, iż ciąg $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest systemem: **cyfry**[1] dowolnej liczby (na razie dodatniej) λ w tym systemie wyznaczone będą przez poniższy algorytm:

$$\begin{cases} a_1 \stackrel{\text{def}}{=} \lfloor \lambda q_1 \rfloor \\ \\ a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\lfloor \left(\lambda - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_n}{q_n} \right) q_{n+1} \right\rfloor \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $\lfloor a \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby a. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywany będzie **rozwinięciem** (lub reprezentacją) liczby λ. Klasyczny system dziesiętny jest systemem zadanym przez ciąg $q_n = 10^{n-1}$. Możemy rozważyć również inny system, związany z liczbą e, dany jako $q_n = n!$. Wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= (0,1,0,0,0,\ldots) \\ \frac{3}{4} &= (0,1,1,2,0,0,\ldots) \\ e &= (2,1,1,1,\ldots) \end{aligned}$$

ponieważ

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{24}, \quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Zauważmy również, iż niezależnie od systemu $a_n \geqslant 0$ dla dowolnej liczby nieujemnej. Ta własność będzie wykorzystywana wielokrotnie przy oszacowaniach.

Niech c_n będzie stanowić maksymalną cyfrę na n-tym miejscu względem ciągu $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wtedy spełnia ona warunek:

$$c_n = \max\left\{ n \in \mathbb{N} \colon \frac{n}{q_n} < \frac{1}{q_{n-1}} \right\}$$

(dla $n = 1$ możemy przyjąć $c_1 = \infty$). Ponieważ $q_n \in \mathbb{N}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, powyższy warunek można zadać wzorem jawnym:

$$c_n = \left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil - 1 \tag{2}$$

Dowód. Załóżmy, że $c_n < \left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil - 1$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Niech

$$\lambda = \frac{\left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil - 1}{q_n}$$

Wtedy, ponieważ $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$, a_n wyznacza się ze wzoru:

[1] Oczywiście będziemy rozumieć to słowo w bardziej ogólnym znaczeniu.

$$a_n = \left\lfloor \frac{\left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil - 1}{q_n} \cdot q_n \right\rfloor = \left\lfloor \left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil - 1 \right\rfloor$$

Ponieważ $\left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil - 1$ jest liczbą całkowitą, można opuścić część całkowitą, otrzymując

$$a_n = \left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil - 1 > c_n$$

co jest sprzecznością z maksymalnością c_n. Tym samym, zadana liczba przyjmuje postać w systemie:

$$\lambda = \left(0, 0, \ldots, 0, \underbrace{\left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil - 1}_{n\text{-ta pozycja}}, 0, \ldots \right)$$

Dla przypadku $c_n > \left\lceil \frac{q_{n+1}}{q_n} \right\rceil - 1$ wystarczy rozważyć

$$\lambda = \left(0, 0, \ldots, 0, \underbrace{c_n}_{n\text{-ta pozycja}}, 0, \ldots \right) = \frac{c_n}{q_n}$$

Wtedy $a_1 = \ldots = a_{n-2} = 0$, ale

$$a_{n-1} = \left\lfloor \frac{c_n}{q_n} \cdot q_{n-1} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{\left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil}{q_n} \cdot q_{n-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil}{\frac{q_n}{q_{n-1}}} \right\rfloor \geqslant 1$$

Zatem $a_{n-1} \neq 0$, co przeczy definicji λ. To oznacza, że wzór (2) jest prawdziwy. □

Ciąg $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest wyznaczony w sposób jednoznaczny. Wzór (2) można przyjąć za jego definicję.

Oznaczenie

Jeżeli nie jest powiedziane inaczej, ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą zarezerwowane dla rozwinięć liczb rzeczywistych, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dla ciągu maksymalnych cyfr, natomiast $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie stanowić rosnący ciąg liczb naturalnych tworzący system pozycyjny. Dodatkowo wyróżniamy ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ opisany jako ciąg spełniający poniższe warunki:

$$\begin{cases} b_1 \overset{\text{def}}{=} q_1 \\ b_n \overset{\text{def}}{=} \dfrac{q_n}{q_{n-1}}, \quad n \geqslant 2 \end{cases}$$

1.1 Systemy zgodne

Definicja

System pozycyjny względem rosnącego ciągu $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych nazywamy **zgodnym** wtedy i tylko wtedy, gdy $q_n \mid q_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Gdy system jest zgodny, liczbę $\lambda > 0$ możemy przedstawić równoważnie w postaci:

$$\lambda = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n} + \ldots \tag{3}$$

gdzie $b_1 = q_1$, $b_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-1} b_j}$ dla $n \geqslant 2$.

W sytuacji, w której $q_n \mid q_{n+1}$, czyli system pozycyjny jest zgodny, postać się upraszcza do:

$$c_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} - 1$$

Przy notacji (3) zachodzi $c_n = b_n - 1$ dla $n \geqslant 2$. Możemy zauważyć, że wówczas zachodzi zależność:

$$\frac{1}{q_n} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{c_j}{q_j} \tag{4}$$

co dla ciągu $q_n = n!$ prowadzi do tożsamości:

$$\sum_{j=n}^{\infty} \frac{j-1}{j!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

Wykażemy tę tożsamość.

Twierdzenie. Dla zgodnego systemu pozycyjnego, gdzie c_n są dane jak wyżej, zachodzi tożsamość (4).

Dowód.

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{c_j}{q_j} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\frac{q_j}{q_{j-1}} - 1}{q_j} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{q_j - q_{j-1}}{q_{j-1}q_j} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_{j-1}} - \frac{1}{q_j}\right) = \left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{q_{n+1}} - \frac{1}{q_{n+2}}\right) + \ldots$$

Ponieważ powyższy szereg jest zbieżny bezwzględnie z założenia, to możemy przegrupować sumę:

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{c_j}{q_j} = \frac{1}{q_n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{q_j}\right) = \frac{1}{q_n} + 0 = \frac{1}{q_n}$$

Co kończy dowód tej równości. □

Twierdzenie. Jeżeli system jest zgodny, to zachodzi oszacowanie

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \; q_n \geqslant 2^{n-1}$$

Innymi słowy, $q_n \in \Omega\left(2^n\right)$.

Dowód. Ponieważ $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnącym ciągiem liczb naturalnych oraz $q_n \mid q_{n+1}$, to iloraz $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ jest większy od jedności i jest liczbą naturalną. To implikuje $q_{n+1} \geqslant 2q_n$. Rozwiązując tę prostą rekurencję, otrzymuje się tezę. □

Wniosek

Przy systemach zgodnych założenie o zbieżności szeregu odwrotności q_n nie jest konieczne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \tag{5}$$

2 Rozwinięcia skończone oraz nieskończone

Bardzo ważną rolę w systemach pozycyjnych odgrywa podział rozwinięć na skończone i nieskończone, a wśród nieskończonych - na okresowe.

Definicja

Rozwinięcie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczby dodatniej rzeczywistej λ względem systemu $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy **skończonym**, jeżeli istnieje taka liczba naturalna k, dla której

$$\forall_{n>k} \; a_n = 0$$

tj. wszystkie cyfry rozwinięcia od pewnego miejsca są zerami. Rozwinięcie, które nie jest skończone, będziemy nazywać **nieskończonym**. Jeżeli istnieją takie liczby naturalne k oraz t, dla których

$$\forall_{n>k} \; a_{n+t} = a_n \neq 0$$

to rozwinięcie określamy jako **okresowe**.

Na wstępie zauważmy, iż każda liczba niewymierna w dowolnym systemie ma nieskończone rozwinięcie - wynika to z faktu, iż ciało liczb wymiernych jest domknięte ze względu na skończone sumy. Nie oznacza to bynajmniej, że każda liczba wymierna posiada skończone rozwinięcie. Możemy również poczynić uwagę, iż

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$$

w sposób oczywisty posiada rozwinięcie okresowe ze stałą $t = 1$.

Uwaga

W systemie zgodnym liczba może posiadać rozwinięcie skończone, jak i nieskończone. Liczba postaci

$$\lambda = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{c_n}{q_n} = \frac{1}{q_k}$$

mimo nieskończonej reprezentacji nazywana będzie liczbą o rozwinięciu skończonym, gdyż, zgodnie z definicją, istnieje liczba naturalna k, dla której $a_n = 0$ dla $n > k$.

2.1 Charakterystyka systemów zgodnych

Twierdzenie. W każdym zgodnym systemie pozycyjnym każda liczba $\lambda > 0$ ma co najwyżej jedno nieskończone rozwinięcie.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że dla pewnej λ istnieją dwa różne ciągi cyfr względem zgodnego systemu $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oznaczmy je jako $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niebędące stale równe 0 od pewnego miejsca. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie pozycją, na której cyfry się różnią po raz pierwszy, bez straty ogólności możemy założyć, że $b_k > a_k$. Wówczas z równości rozwinięć λ oraz na mocy (4):

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{q_n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{q_n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{q_n} \leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{q_n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{c_n}{q_n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{q_n} + \frac{1}{q_k} =$$
$$= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{q_n} + \frac{a_k+1}{q_k} \leqslant \sum_{n=1}^{k-1} \frac{b_n}{q_n} + \frac{b_k}{q_k} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{q_n} = \lambda$$

Wszystkie nierówności okazują się równościami, z czego wnioskujemy, iż $b_k = a_k + 1$, $a_n = c_n$ oraz $b_n = 0$ dla $n > k$. Zatem rozwinięcie b_n jest skończone, co przeczy założeniu. □

Twierdzenie. W systemie, który nie jest zgodny, istnieje liczba, która ma dwa różne nieskończone rozwinięcia $(a_n)^{(1)}_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)^{(2)}_{n\in\mathbb{N}}$ spełniające $a^{(i)}_n \leqslant c_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2\}$.

Dowód. Możemy bez straty ogólności założyć, że $q_1 = 1$. Niech $1 < k \in \mathbb{N}$ będzie najmniejszym indeksem, dla którego q_k nie dzieli q_{k+1}. Wówczas zachodzi oszacowanie na mocy (4):

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil - 1}{q_n} > \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\frac{q_n}{q_{n-1}} - 1}{q_n} = \frac{1}{q_k}$$

Niech różnica między tymi sumami będzie oznaczona jako $\varepsilon > 0$. W przedziale $\left(\frac{1}{q_k}, \frac{1}{q_k} + \varepsilon\right)$ znajduje się liczba niewymierna, oznaczmy ją jako λ. $a^{(i)}_1 = \ldots = a^{(i)}_{k-1} = 0$ z założenia o minimalności k dla $i \in \{1, 2\}$. Wówczas

$$a^{(1)}_k = \lfloor \lambda \cdot q_k \rfloor > \left\lfloor \frac{1}{q_k} \cdot q_k \right\rfloor = 1$$

Ponieważ liczba λ jest niewymierna, posiada nieskończone rozwinięcie względem ciągu $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z niezerową cyfrą na k-tej pozycji. Jednakże biorąc $a^{(2)}_k = 0$, w dalszym ciągu istnieje ciąg spełniający $a^{(2)}_n \leqslant c_n$ dla $n \geqslant k$ na mocy poniższego oszacowania:

$$\frac{1}{q_k} < \lambda = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a^{(2)}_n}{q_n} < \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\left\lceil \frac{q_n}{q_{n-1}} \right\rceil - 1}{q_n}$$

Tym samym λ posiada dwa nieskończone rozwinięcia. To kończy dowód tego faktu. $\square$

Uzyskaliśmy pewną charakterystykę systemów zgodnych poprzez jednoznaczność nieskończonego rozwinięcia. Możemy zauważyć także, że algorytm wyznaczania cyfr jest algorytmem zachłannym, tym niemniej można konstruować inne rozwinięcia w dalszym ciągu spełniające nierównośc $a_n \leqslant c_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie. Dla każdej liczby niewymiernej $\lambda \in (0,2)$ istnieje ciąg rosnący $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych o własności $q_n \mid q_{n+1}$, dla którego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$.

Dowód. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie reprezentowana przez nieskończony ciąg postaci:

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}}, \quad a_n \in \{0,1\} \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Innymi słowy, zapiszmy λ w systemie binarnym. Niech $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem indeksów, dla których $(a_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zawiera wszystkie te wyrazy, dla których $a_{j_n} = 1$; ponieważ λ jest liczbą niewymierną, ciąg indeksów musi być nieskończony. Biorąc $q_n \stackrel{\text{def}}{=} 2^{j_n-1}$, otrzymujemy tezę: ciąg $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem rosnącym, a zatem $2^{j_n-1} \mid 2^{j_{n+1}-1}$, natomiast druga część twierdzenia wynika z poniższej sumy:

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j_n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$$

$\square$

3 Arytmetyka w systemach zgodnych

3.1 Dodawanie

Rozważmy system zgodny $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz dwie liczby dodatnie α, β o **skończonych** rozwinięciach $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ odpowiednio. Niech $k = \max\{n \in \mathbb{N} \colon \alpha_n \neq 0 \vee \beta_n \neq 0\}$ będzie miejscem, od którego każda kolejna cyfra rozwinięcia zarówno α jak i β jest zerem. Wówczas możemy wykonać dodawanie:

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \alpha + \beta = \sum_{n=1}^{k} \frac{\alpha_n}{q_n} + \sum_{n=1}^{k} \frac{\beta_n}{q_n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{\gamma_n}{q_n}$$

gdzie γ_n jest zadane poniższym algorytmem[2]:

$$\begin{cases} \gamma_n = 0, & k < n \\ \gamma_n = \left\lfloor \sum_{i=n}^{k} \frac{\alpha_{k-i+n} + \beta_{k-i+n}}{\prod_{l=n+1}^{k-i+n} b_l} \right\rfloor \mod (c_n + 1), & 1 \leqslant n \leqslant k \end{cases} \tag{6}$$

Uzyskujemy w ten sposób ciąg $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniający warunek $\gamma_n \leqslant c_n < b_n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$. Nietrudno się przekonać, iż $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rzeczywiście rozwinięciem γ, tj. zachodzi

$$\gamma = \sum_{n=1}^{k} \frac{\gamma_n}{q_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{q_n}$$

Działanie dodawania przeprowadza się analogicznie jak w przypadku klasycznych systemów pozycyjnych[3]. Dla liczb α, β o nieskończonych rozwinięciach wystarczy wprowadzić ciąg sekwencji $\left((\gamma_n)^{(k)}_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ opisany algorytmem (6). Wówczas:

$$\gamma_n = \lim_{k\to\infty} (\gamma_n)^{(k)}_{n\in\mathbb{N}}$$

By przekonać się, iż granica ta istnieje, a więc reprezentacja jest dobrze określona, wystarczy zauważyć, iż dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ciąg $(\gamma_n)^{(k)}_{n\in\mathbb{N}}$ jest stały od pewnego miejsca.

[2] Przyjmijmy $x \mod (c_1 + 1) = x \mod \infty = x$. Przypomnijmy, iż dla pozostałych $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $b_n = c_n + 1$.

[3] Wystarczy zauważyć, iż powyższy algorytm realizuje dodawanie „w słupku”.

Oznaczenie

Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$ będą rozwinięciami w pewnym systemie zgodnym. Możemy zdefiniować operację dodawania reprezentacji liczb:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + (\beta_1, \beta_2, \ldots) \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$$

gdzie $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozwinięciem $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \alpha + \beta$ wyznaczonym przez operację dodawania.

Wynikiem dodawania może być nieskończony ciąg odpowiadający liczbie o skończym rozwinięciu. Odpowiada to sytuacji znanej z systemu dziesiętnego $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0.333\ldots + 0.666\ldots = 0.999\ldots = 1$.

W systemach, które nie są zgodne, powyższe zależności na ogół nie są prawdziwe. Rozważmy $q_n = n^2$ oraz $\alpha = \frac{1}{9} = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, $\beta = \frac{2}{9} = (0, 0, 2, 0, 0, \ldots)$. Ponieważ $c_3 = 2 < \alpha_3 + \beta_3$ oraz $c_2 = 3$, zgodnie z algorytmem (6) otrzymujemy:

$$\gamma_3 = \lfloor \alpha_3 + \beta_3 \rfloor \mod 3 = 0, \quad \gamma_2 = \left\lfloor \alpha_2 + \beta_2 + \frac{\alpha_3 + \beta_3}{3} \right\rfloor \mod 4 = \lfloor 0 + 1 \rfloor \mod 4 = 1$$
$$\gamma_1 = \left\lfloor \alpha_1 + \beta_1 + \frac{\alpha_2 + \beta_2}{4} + \frac{\alpha_3 + \beta_3}{3 \cdot 4} \right\rfloor = \left\lfloor 0 + \frac{3}{12} \right\rfloor = 0$$

Ale $\gamma = (0, 1, 0, 0, \ldots) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}$, sprzeczność.

3.2 Odejmowanie

Zanim przejdziemy do odejmowania, należy zastanowić się, jak, zgodnie z algorytmem wyznaczania cyfr (1), wyglądają reprezentacje liczb ujemnych. Niech $\lambda < 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Zauważmy, że z dodatniości q_1 wynika, iż $a_1 = \lfloor \lambda q_1 \rfloor < 0$. Wówczas $\lambda - \frac{\lfloor \lambda q_1 \rfloor}{q_1} \geqslant 0$ - tym samym nierówność $0 \leqslant a_n \leqslant c_n$ pozostaje prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 2$. Przy takiej konwencji algorytm (6) pozostaje prawidłowy również dla odejmowania - wówczas odejmowanie traktujemy jako dodawanie liczby ujemnej.

Uwaga

Dla $q_n = 10^{n-1}$ rozwinięcia liczb ujemnych nie odpowiadają klasycznym rozwinięciom dziesiętnym; przykładowo:

$$-\frac{1}{3} = (-1, 6, 6, \ldots) \neq (0, -3, -3, \ldots) = -(0, 3, 3, \ldots)$$

4 Systemy absolutnie zgodne

Z pewnych względów interesować będą nas te systemy, w których relatywnie łatwo można zweryfikować wymierność zadanej liczby rzeczywistej na podstawie jej rozwinięcia. Sekcję tę rozpoczniemy od ważnego twierdzenia.

Twierdzenie. Niech λ posiada nieskończone rozwinięcie względem zgodnego systemu $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz niech dla każdej liczby pierwszej $p \in \mathbb{P}$ istnieje nieskończenie wiele liczb $n \in \mathbb{N}$, dla których $p \mid b_n$, gdzie[4]

$$b_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q_n}{\prod_{j=1}^{n-1} b_j}$$

Wówczas λ jest liczbą niewymierną.

Dowód. Przede wszystkim zauważmy, że $b_1 = q_1$ oraz $1 < b_{n+1} \in \mathbb{N}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ na mocy zgodności. Załóżmy, że $\lambda = \frac{r}{s}$ dla pewnych liczb naturalnych r, s. Z założenia możemy dobrać n odpowiednio duże tak, by $s \mid b_1 \cdot \ldots \cdot b_n = q_n$. Wystarczy pokazać, że zachodzi

$$\lambda = \frac{r}{s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k}$$

[4] Przyjmijmy $\prod_\emptyset = 1$.

co zaprzeczy nieskończoności rozwinięcia. Ponieważ system jest zgodny, to dla każdego ciągu $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t_n}{q_n} = \frac{t}{q_n}$$

dla pewnego $t \in \mathbb{N}$. Ale skoro λ posiada nieskończone rozwinięcie, to na mocy (4):

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{q_k} \in \left(0, \frac{1}{q_n}\right)$$

Nie istnieje jednak $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{q_n}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{s}\right)$, dla którego

$$\lambda = \frac{b}{s} + \varepsilon = \frac{r}{s}$$

Zatem $a_k = 0$ lub $a_k = c_k$ dla $k > n$, co jest sprzecznością. □

Wniosek

Każda liczba o nieskończonym rozwinięciu względem systemu silniowego $q_n = n!$ jest niewymierna. W szczególności $e \notin \mathbb{Q}$. Również liczby Bessela $I_0(2)$ oraz $J_0(2)$ są niewymierne - mają nieskończone rozwinięcie w systemie $q_n = (n!)^2$.

Założenia poprzedniego twierdzenia prowadzą nas do następnej własności pewnej klasy systemów pozycyjnych.

Definicja

System zgodny nazywamy **absolutnie zgodnym**, jeżeli każda liczba wymierna posiada skończone rozwinięcie w tym systemie.

Założenie o zgodności jest istotne: istnieją niezgodne systemy, w których każda liczba wymierna posiada skończone rozwinięcie, np. $q_n = n!$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Naturalne jest pytanie, pod jakimi warunkami każda liczba wymierna posiada skończone rozwinięcie.

Hipoteza. W systemie $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ każda liczba wymierna posiada skończone rozwinięcie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby pierwszej $p \in \mathbb{P}$ istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$ spełniających $p \mid b_n$, gdzie ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zdefiniowany jak w poprzednim twierdzeniu.

Hipoteza. Jeżeli system $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest zgodny i każda liczba wymierna posiada skończone rozwinięcie, to istnieje podciąg $(q_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tworzący system absolutnie zgodny.

Poniższy lemat jest technicznym narzędziem pozwalającym w inny sposób badać niewymierność zadanej liczby; oparty jest na sumach Cesàro.

Lemat. Rozważmy system absolutnie zgodny. Jeżeli zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j}{c_j} \in (0,1) \tag{7}$$

to liczba jest niewymierna.

Dowód. Załóżmy, że λ jest wymierna, wówczas na mocy poprzedniego twierdzenia od pewnego miejsca, oznaczmy jako $k \in \mathbb{N}$ (przyjmijmy $k \geqslant 2$), ma rozwinięcie stale równe 0. Wówczas zachodzi:

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{q_n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{q_n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{0}{q_n}$$

Bezpośrednie obliczenia wskazują, iż:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j}{c_j} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=2}^{k-1} \frac{c_j}{c_j} + \sum_{j=k}^{n} \frac{0}{c_j} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{k-2}{n-1} = 0 \notin (0,1)$$

To kończy dowód. □

Uwaga

Twierdzenie przeciwne nie jest przeciwne, wystarczy rozważyć $q_n = n!$ oraz $\lambda = e$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = 0$$

Dodajmy również, że wprowadzony lemat nie mówi nic o istnieniu granicy (7).

Przykład. Pokażemy niewymierność $\frac{1}{e}$. Niech $q_n = n!$ będzie absolutnie zgodnym systemem silniowym, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rozwinięciem liczby $\frac{1}{e}$. Możemy zauważyć, iż

$$\frac{1}{e} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!} = 0 + \frac{2}{3!} + 0 + \frac{4}{5!} + 0 + \frac{6}{7!} + 0 + \ldots = (0,0,2,0,4,0,6,0,\ldots)$$

Z faktu, iż $a_n = c_n$ dla niezerowych wartości a_n, bezpośrednio widać, iż ciąg sum Cesáro zbiega do $\frac{1}{2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \sum_{j=2}^{n} (j \bmod 2) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}{n-1} = \frac{1}{2}$$

Na mocy lematu $\frac{1}{e}$ musi być niewymierna.

Hipoteza. Dla każdej liczby niewymiernej $0 < \lambda < 1$ istnieje system absolutnie zgodny $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dla którego

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$$

5 Systemy zdegenerowane

Na koniec wprowadźmy pojęcie systemu zdegenerowanego.

Definicja

Rosnący ciąg $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych nazywamy **systemem zdegenerowanym**, jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ jest rozbieżny.

Na mocy uwagi (5) system zdegenerowany nie może być zgodny. Jest także oczywiste, że z racji rozbieżności szeregu przedstawienie dowolnej liczby nie jest jednoznaczne[5] - dla każdej liczby możemy zażądać, by $a_n = 0$ dla $n < k$, gdzie k jest dowolnie dużą liczbą naturalną. Modyfikując algorytm (1) w podany sposób

$$\begin{cases} a_1 \overset{\text{def}}{=} \min\{1, \lfloor \lambda q_1 \rfloor\} \\ a_{n+1} \overset{\text{def}}{=} \min\left\{1, \left\lfloor \left(\lambda - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_n}{q_n}\right) q_{n+1} \right\rfloor\right\} \end{cases}$$

możemy wyznaczyć rozwinięcie dowolnej liczby $\lambda > 0$ w szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{a_n}{q_n}, \quad a_n \in \{0,1\} \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

W szczególności, każda liczba dodatnia jest sumą postaci:

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}, \quad a_n \in \{0,1\} \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

[5] Mowa tu o rozwinięciach innych niż utworzonych za pomocą algorytmu (1).

6 Załączniki

Poniżej przedstawiono kod do programu `Mathematica` pozwalający wyznaczyć cyfry w wybranym systemie (niezgodnym lub nawet zdegenerowanym).

```
$MaxExtraPrecision = 150;
UtworzSystem[cyfr_, ciag_] := Module[{i, system}, system = {};
   For[i = 1, i < cyfr, i++, AppendTo[system, ciag[i]]];
   Return[system];];
WyznaczCyfry[system_, x_] := Module[{cyfry, i}, cyfry = {};
   For[i = 1, i <= Length[system], i++,
    AppendTo[cyfry,
     Floor[(x - Sum[cyfry[[k]]/system[[k]], {k, 1, i - 1}]) system[[
        i]] ]]]; Return[cyfry];];
MaksymalneCyfry[system_] := Module[{cyfry, i}, cyfry = {Infinity};
   For[i = 2, i <= Length[system], i++,
    AppendTo[cyfry, Ceiling[system[[i]]/system[[i - 1]]] - 1]];
   Return[cyfry];];
DodajLiczby[system_, x_, y_] :=
  Module[{cx, cy, R, S, cz, cyfry}, cx = WyznaczCyfry[system, x];
   cy = WyznaczCyfry[system, y]; cyfry = MaksymalneCyfry[system] + 1;
   S[j_, k_] :=
    Floor[Sum[(cx[[k - i + j]] + cy[[k - i + j]])/
      Product[cyfry[[m]], {m, j + 1, k - i + j}], {i, j, k}]];
   R[j_, k_] := If[j != 1, Mod[S[j, k], cyfry[[j]]], S[j, k]];
   cz = Table[R[i, Length[system]], {i, 1, Length[system]}];
   Return[cz];];
CzyZgodny[system_] := Module[{i, zgodny}, zgodny = True;
   For[i = 2, i <= Length[system], i++,
    If[Not[Element[system[[i]]/system[[i - 1]], Integers]],
     zgodny = False; Break;]];
   If[zgodny, Return["System jest zgodny."],
    Return["System nie jest zgodny."]]];
SumaCesaro[system_, x_] :=
  Module[{cyfry, maksymalne}, cyfry = WyznaczCyfry[system, x];
   maksymalne = MaksymalneCyfry[system];
   1/(Length[system] - 1)
     Sum[cyfry[[j]]/maksymalne[[j]], {j, 2, Length[system]}]];
```

System tworzy lista kolejnych wyrazów ciągu skończonego $(q_1, \ldots, q_N)$, zastosowanie niektórych funkcji podaje poniższy przykład:

```
System = UtworzSystem[50, #1! &];
WyznaczCyfry[System, 1/E]
DodajLiczby[System, 1/E, E]
MaksymalneCyfry[System]
CzyZgodny[System]
```

tworzący pięćdziesięciocyfrowy ($N = 50$) system silniowy, który wyznacza cyfry liczb $\frac{1}{e}$, $e + \frac{1}{e}$. Dodatkowo sprawdzany jest ciąg $(c_1, \ldots, c_N)$ oraz zgodność tego systemu.