Ekstremalnie fajne równania

ELEMENTY RACHUNKU WARIACYJNEGO

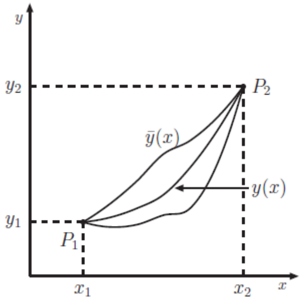
Zaczniemy od ogólnych uwag nt. rachunku wariacyjnego, który jest bardzo przydatnym narzędziem mogącym posłużyć do rozwiązywania wielu problemów praktycznych, nie tylko z zakresu fizyki.
Dana jest funkcja $F(y(x), y'(x), x)$ i dwa punkty $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$ takie, że $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$.

Mówimy, że całka

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F\left(y(x), y'(x), x\right) \mathrm{d}x$$

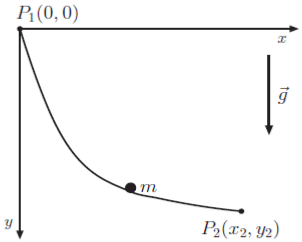
ma minimum lub maksimum dla pewnej różniczkowalnej krzywej $y(x)$ o początku w punkcie P_1 i końcu w punkcie P_2, jeśli dla każdej innej, bliskiej, różniczkowalnej krzywej $\bar{y}(x)$ o tych samych końcach osiąga odpowiednio wartość większą lub mniejszą.

Innymi słowy, rozpatrujemy wszystkie różniczkowalne krzywe pomiędzy punktami P_1 i P_2 i wybieramy tą, która ekstremalizuje zdefiniowaną wyżej całkę.



Poszukiwana krzywa $y(x)$ ekstremalizuje całkę I.

Po raz pierwszy tego typu problem sformułował Johann Bernoulli w 1696 r. *Przykład 1:* Brachistochrona Bernoulliego. Poszukujemy krzywej rozpiętej pomiędzy zadanymi punktami P_1 i P_2, po której punkt materialny o masie m zsunie się w jednorodnym polu grawitacyjnym bez tarcia w najkrótszym czasie.



Na nieskończenie krótkiej drodze $\mathrm{d}s$ prędkość v jest w przybliżeniu stała, więc $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v}$.

Całkowity czas ruchu punktu materialnego pomiędzy punktami P_1 i P_2 jest równy całce

$$\int_0^T \mathrm{d}t = \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad T = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\mathrm{d}s}{v}$$

gdzie

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x$$

Skorzystajmy z zasady zachowania energii w polu grawitacyjnym

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gy}$$

gdzie uwzględniliśmy fakt, że oś Oy układu kartezjańskiego jest skierowana w dół.

Musimy zatem zminimalizować całkę

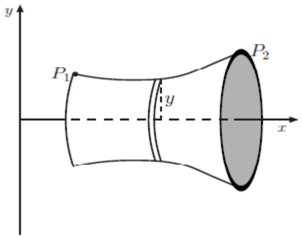
$$T = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\mathrm{d}x$$

Zauważmy, że funkcja F ma w tym przypadku postać

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

gdyż stały czynnik występujący przed całką nie wpływa na to, dla jakiej funkcji będzie mieć ona ekstremum.

Przykład 2: Minimalna powierzchnia obrotowa. Poszukujemy krzywej rozpiętej pomiędzy zadanymi punktami P_1 i P_2, która w wyniku obrotu o kąt pełny względem osi Ox utworzy bryłę o najmniejszej powierzchni.



Promień y nieskończenie cienkiego paska o szerokości $\mathrm{d}s$ jest w przybliżeniu stały, więc jego powierzchnia

$$\mathrm{d}S = 2\pi y \mathrm{d}s,$$

gdzie tak jak poprzednio

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x$$

PROBLEMY WARIACYJNE

powierzchnia bryły obrotowej wyraża się wzorem

$$S = \int_{P_1}^{P_2} 2\pi y \mathrm{d}s = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$

Funkcja F ma w tym przypadku postać

$$F(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$$

gdyż czynnik 2π występujący przed całką nie wpływa na to, dla jakiej funkcji będzie mieć ona ekstremum.

Leonhard Euler (1707–1783) sprowadził problem wariacyjny do równań różniczkowych.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Jest to równanie Eulera–Lagrange'a, którego spełnienie jest warunkiem koniecznym na to, aby całka

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x)\mathrm{d}x$$

miała ekstremum dla krzywej $y(x)$ o ustalonych wpółrzędnych punktów końcowych: $y_1 = y(x_1)$ i $y_2 = y(x_2)$.

ELEMENTY RACHUNKU WARIACYJNEGO

Równanie Eulera–Lagrange'a jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu. W przypadku gdy funkcja F nie zależy bezpośrednio od zmiennej niezależnej x, tzn. $F(y, y', x) = F(y, y')$, jedno całkowanie można łatwo wykonać i równanie Eulera–Lagrange'a sprowadza się do równania

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = const.$$

Dla dowodu pokażemy, że pochodna wyrażenia po lewej stronie równania znika.
Obliczmy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} =$$

$$= y'\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}_{=0} = 0$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z równania Eulera–Lagrange'a.
Z taką sytuacją mieliśmy właśnie do czynienia w obu rozpatrzonych wcześniej przykładach problemów wariacyjnych.

TROCHĘ MATEMATYKI

Niech $X = C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$. Rozpatrzmy funkcjonał Φ określony na przestrzeni X dany wzorem

$$\Phi(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), x'(t), t)\mathrm{d}t$$

Funkcjonał Φ nazywamy funkcjonałem działania. Będziemy zakładać, że $L\colon \mathbb{R}^{2n} \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu.

Twierdzenie 1

Funkcjonał Φ jest różniczkowalny w każdym punkcie $x \in X$, a jego pochodna wyraża się wzorem:

$$\Phi'(x)h = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial x_i'} \right] h_i \right) \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \left[h_i \frac{\partial L}{\partial x_i'} \right]_{t=t_0}^{t=t_1}$$

TROCHĘ MATEMATYKI

Niech V będzie hiperpłaszczyzną w X daną wzorem

$$V = \{x \in X \colon x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1\}$$

gdzie x_0 i x_1 są ustalonymi punktami z $\mathbb{R}^n$. Wówczas:

Wniosek 1

Pochodna funkcjonału $\Phi \colon V \to \mathbb{R}$ wyraża się wzorem:

$$\Phi'(x)h = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial x_i'} \right] h_i \mathrm{d}t$$

Będziemy rozpatrywali funkcjonał Φ tylko na hiperpłaszczyźnie V. Funkcję $x \in V$ nazywamy ekstremalą funkcjonału Φ, jeżeli $\Phi'(x) = 0$.
Oczywiście funkcjonał Φ może mieć ekstermum tylko na ekstremali.

Twierdzenie 2

Funkcja $x \in V$ jest ekstremalą funkcjonału Φ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial x_i'} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ZASADA HAMILTONA

Irlandzki matematyk William Rowan Hamilton (1805–1865) sformułował zasadę minimalnego (stacjonarnego) działania, która brzmi następująco.

Zasada Hamiltona

Ruch układu mechanicznego o n stopniach swobody od chwili początkowej t_1 do chwili końcowej t_2 przebiega tak, że działanie

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) \, \mathrm{d}t$$

jest minimalne (stacjonarne), tzn. $\delta S = 0$.

Wariacje współrzędnych uogólnionych w chwili początkowej i końcowej muszą przy tym znikać

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$