Piotr Idzik 25.06.2009

Kilka słów o liczbach Liouville'a

Definicja 1. *Liczbę $\alpha \in \mathbb{C}$ nazywamy liczbą algebraiczną, jeżeli istnieje taki niezerowy wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$, że $f(\alpha) = 0$. Wszystkie liczby zespolone, które nie są algebraiczne nazywamy liczbami przestępnymi. Stopniem liczby algebraicznej α nazywamy minimalny stopień wielomianu niezerowego $f \in \mathbb{Z}[x]$ takiego, że $f(\alpha) = 0$.*

Twierdzenie 2 (Liouville'a o aproksymacji diofantycznej)**.** *Niech α będzie niewymierną liczbą algebraiczną stopnia n. Wówczas istnieje taka stała $A > 0$, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ zachodzi nierówność:*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \frac{A}{b^n}$$

Dowód. Niech niezerowy wielomian $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ będzie taki, że $f(\alpha) = 0$. Niech $M = \max\{|f'(x)| \colon x \in [\alpha - 1, \alpha + 1]\}$, dalej niech:

$$A < \min\left\{1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|\right\}$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ są parami różnymi pierwiastkami wielomianu f różnymi od α. Przypuśmy, że teza twierdzenia nie zachodzi dla pewnych $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Wtedy mamy:

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leqslant \frac{A}{b^n} \leqslant A < \min\left\{1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|\right\} \leqslant \min\{1, |\alpha - \alpha_1|, \ldots, |\alpha - \alpha_m|\}$$

Stąd mamy, że $\frac{a}{b} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ oraz, że $\bigwedge_{i \in \{1, \ldots, m\}} \frac{a}{b} \neq \alpha_i$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej otrzymujemy, że istnieje takie ξ leżące między α i $\frac{a}{b}$, że:

$$f(\alpha) - f\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\alpha - \frac{a}{b}\right) f'(\xi)$$

Zauważmy, że $f'(\xi) \neq 0$, ponieważ $\frac{a}{b}$ nie jest pierwiastkiem f oraz $\alpha \neq \frac{a}{b}$. Stąd mamy:

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{f\left(\frac{a}{b}\right) - f(\alpha)}{f'(\xi)}\right| = \left|\frac{f\left(\frac{a}{b}\right)}{f'(\xi)}\right|$$

Policzmy: $\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \frac{\left|\sum_{j=0}^{n} a_j a^j b^{n-j}\right|}{b^n} \geqslant \frac{1}{b^n}$. Pamiętając, że $|f'(\xi)| \leqslant M$ otrzymujemy, że:

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geqslant \frac{1}{Mb^n} > \frac{A}{b^n} \geqslant \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|$$

Sprzeczność. □

Twierdzenie 3 (Twierdzenie Thue-Siegela-Rotha, 1955)**.** *Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ będzie liczbą algebraiczną oraz $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje co najwyżej skończenie wiele liczb względnie pierwszych $a \in \mathbb{Z}$ oraz $b \in \mathbb{N}$ takich, że:*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^{2+\varepsilon}}$$

Definicja 4 (Liczby Liouville'a)**.** *Liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbą Liouville'a, jeżeli:*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{p,q\in\mathbb{Z},\, q>1} 0 < \left|\lambda - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

Zbiór wszystkich liczb Liouville'a oznaczamy symbolem $\mathbb{L}$.

Uwaga 5. Zauważy, że wszystkie liczby Liouville'a są niewymierne.

Dowód. Niech λ będzie liczbą Liouville'a. Przypuśćmy nie wprost, że $\lambda \in \mathbb{Q}$, tzn. istnieją takie liczby c, $d \in \mathbb{Z}$, że $\lambda = \frac{c}{d}$. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $2^{n-1} > d$. Dla tak dobranego n, z definicji liczb Liouville'a, istnieją liczby p, $q \in \mathbb{Z}, q > 1$, takie że $\frac{p}{q} \neq \frac{c}{d}$ oraz:

$$\left|\lambda - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{c}{d} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|cq - dp|}{qd} \geqslant \frac{1}{qd} > \frac{1}{2^{n-1}q} \geqslant \frac{1}{q^n}$$

Co daje sprzeczność. □

Twierdzenie 6 (Liouville, 1844)**.** *Wszytstkie liczby Liouville'a są liczbami przestępnymi.*

Dowód. Niech λ będzie liczbą Liouville'a. Przypuśćmy, że λ jest liczbą algebraiczną (stopnia n). Na mocy uwagi 5 λ jest liczbą niewymierną. Z twierdzenia 2 istnieje stała $L > 0$ taka, że dla wszystkich $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$ mamy: $\left|\lambda - \frac{p}{q}\right| > \frac{L}{q^n}$. Niech $r \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\frac{1}{2^r} < L$. Niech $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$ będą takie, że $0 < \left|\lambda - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+r}}$. Stąd dalej:

$$0 < \left|\lambda - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+r}} \leqslant \frac{1}{2^r q^n} < \frac{L}{q^n} < \left|\lambda - \frac{p}{q}\right|$$

Sprzeczność. □

Twierdzenie 7. *Niech liczby $c_i \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz niech $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}}$. Wówczas x jest liczbą Liouville'a.*

Dowód. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Niech $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{10^{i!}}$. Dalej niech $q = 10^{n!}$ oraz $p \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $s_n = \frac{p}{q}$. Zachodzi nierówność:

$$0 < x - \frac{p}{q} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{c_i}{10^{i!}} < \frac{1}{10^{(n+1)!-1}} = \frac{1}{(10^{n!})^n} \cdot \frac{1}{10^{n!-1}} \leqslant \frac{1}{q^n}$$

□

Wniosek 8. Zbiór wszystkich liczb Liouville'a jest zbiorem mocy continuum.

Wniosek 9. Niech $a \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Wówczas $x = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n!}$ jest liczbą Liouville'a.

Definicja 10. *Stałą Liouville'a nazywamy liczbę:*

$$l = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} = 0.110001000000000000000001000000\ldots$$

Twierdzenie 11. *Zbiór wszystkich liczb Liouville'a z przedziału $[0, 1]$ jest zbiorem miary (Lebesgue'a) 0.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz niech $n \in \mathbb{N}$ będzie na tyle duże, aby $\sum_{b=2}^{\infty} \frac{4}{b^{n-1}} < \varepsilon$ Niech $\lambda \in [0,1]$ będzie liczbą Liouville. Wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieją takie $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 1$ takie, że zachodzi nierówność $\left|\lambda - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^n}$. Zauważmy, że jeżeli prawa strona nierówności jest mniejsza niż $\frac{1}{2}$ oraz $\lambda \in [0,1]$, to $-\frac{b}{2} < a < \frac{3b}{2}$. Pamiętając, że $a \in \mathbb{Z}$ otrzymujemy, że a może przyjmować co najwyżej jedną z $2b$ wartości. Stąd λ leży w jednym z co najwyżej $2b$ przedziałów o długości $\frac{2}{b^n}$. Zatem miara zbioru liczb Liouville'a jest mniejsza niż $\sum_{b=2}^{\infty} \frac{4b}{b^n} < \varepsilon$. □

Twierdzenie 12. *Niech λ będzie liczbą Liouville'a, $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, wtedy $a\lambda + b$ jest liczbą Liouville'a.*

Dowód. Zauważmy, że:

$$\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{L}, a \in \mathbb{Z}} \lambda + a \in \mathbb{L} \tag{$\star$}$$

Ustalmy $\lambda \in \mathbb{L}$, $a \in \mathbb{Z}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Niech $p \in \mathbb{Z}$ oraz $q \in \mathbb{N}$ będą takie, że $\left|\lambda - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$. Policzmy:

$$\left|\lambda + a - \frac{p + aq}{q}\right| = \left|\lambda - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

Udowodnimy, że:

$$\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{L}, q \in \mathbb{Q}} q\lambda \in \mathbb{L} \tag{$\star\star$}$$

Ustalmy $\lambda \in \mathbb{L}$ oraz $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 1$) oraz $n \in \mathbb{N}$. Niech $n < m \in \mathbb{N}$ będzie tak duże, aby:

$$|a| b^{n-1} < 2^{m-n}$$

Dla tak dobranego m, niech $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$ będą takie, że $\left|\lambda - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m}$. Zauważmy, że zachodzi nierówność:

$$\begin{aligned} |a| b^{n-1} &< 2^{m-n} \leqslant q^{m-n} \\ \frac{|a|}{bq^m} &< \frac{1}{(bq)^n} \end{aligned}$$

Policzmy:

$$\left|\frac{a}{b}\lambda - \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q}\right| = \frac{|a|}{b} \cdot \left|\lambda - \frac{p}{q}\right| < \frac{|a|}{b} \cdot \frac{1}{q^m} < \frac{1}{(bq)^n}$$

Zauważmy, że z ($\star$) oraz z ($\star\star$) wynika teza. □

Wniosek 13. Zbiór wszystkich liczb Liouville'a jest zbiorem gęstym w $\mathbb{R}$.

Dowód. Niech λ będzie dowolną liczbą Liouville'a. Rozważmy zbiór $\lambda\mathbb{Q} = \{q\lambda \colon q \in \mathbb{Q}\}$. Zauważmy, że zbiór $\lambda\mathbb{Q}$ jest gęstym podzbiorem $\mathbb{R}$. Na mocy twierdzenia 12 $\lambda\mathbb{Q} \subset \mathbb{L}$. □

Twierdzenie 14 (P. Erdös, 1961)**.** *Niech $0 \neq x \in \mathbb{R}$. Wtedy istnieją takie liczby Liouville'a $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, że:*

$$x = \alpha + \beta = \gamma\delta$$

Twierdzenie 15 (Lindemann, 1885)**.** *Jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są niezerowymi, parami różnymi liczbami algebraicznymi, to dla żadnych liczb algebraicznych $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nie zachodzi równość:*

$$c_1 e^{a_1} + c_2 e^{a_2} + \ldots + c_n e^{a_n} = 0$$

Wniosek 16. Dla dowolnej algebraicznej $\alpha \neq 0$ liczba e^{α} jest przestępna.

Twierdzenie 17 (Gelfond–Schneider, 1934)**.** *Niech α, β będą liczbami algebraicznymi takimi, że $\alpha \neq 0$, $\log \alpha \neq 0$ oraz β jest liczbą niewymierną, wtedy α^{β} jest liczbą przestępną.*

Wniosek 18. Poniższe liczby są liczbami przestępnymi:

- e^{π} (tzw. stała Gelfond'a) [1]
- $2^{\sqrt{2}}$ (tzw. stała Gelfond–Schneider'a)

Twierdzenie 19. *Poniższe liczby są liczbami przestępnymi:*

- *e (Ch. Hermite, 1873)*
- *π (F. Lindemann, 1882)*
- $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, *jeżeli $0 \neq \alpha$ jest liczbą algebraiczną*
- $\ln \alpha$, *jeżeli $\alpha \notin \{0, 1\}$ jest liczbą algebraiczną*
- $\frac{\ln 3}{\ln 2}$

Uwaga 20. Obecnie nie wiadomo czy liczby πe, $\pi + e$, e^e, π^{π}, π^e, $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n\right)$, $\zeta(3)$ ([2]) są liczbami przestępnymi czy nie.

Literatura

[1] P. Erdös, *Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers*, Budapest, 1961

[2] M. Filaseta, *The Beginnings of Transcendental Numbers*, Columbia, 2001

[3] A. Mostowski, M.Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa, 1958

[1] Zauważmy, że $e^{\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^{-i} = (-1)^{-i}$

[2] $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$