Przegląd algebr

Piotr Pokora

30 czerwca 2009

Definicja 1. Niech E będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$, char $(\mathbb{K}) \neq 2$. W E mamy wprowadzone działanie "+" wewnętrzne oraz "$\cdot$" jako działanie zewnętrzne. Definiujemy na E działanie "$\cdot$" w następujący sposób: $h(x, y) = x \cdot y$.
Mówimy, że E z działaniami jak wyżej stanowi algebrę, gdy oprócz standardowych działań "+" i "$\cdot$" działanie mnożenia spełnia następujące warunki:

(i) $(x + y)z = xz + yz, x(y + z) = xy + xz,\ \forall x, y, z \in E.$

(ii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y, x(\alpha y) = \alpha(xy),\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\ , \forall x, y, z \in E.$

Wtedy E stanowi algebrę.
Definicja 2. Algebra nad ciałem $\mathbb{K}$ (lub $\mathbb{K}$-algebra) nazywamy pierścień $(A, +, \cdot)$, mający jednocześnie strukturę przestrzeni liniowej nad $\mathbb{K}$, przy czym: $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)\ \ , \forall \lambda \in \mathbb{K}$ i $x, y \in A$.
Definicja 3. Algebra A jest łączna, jeśli pierścien $(A, +, \cdot)$ jest łączny.
Definicja 4. Algebra A jest przemienna (komutatywna), jeśli pierścien $(A, +, \cdot)$ jest przemienny ze względu na mnożenie.
Definicja 5. Algebrę A nazwiemy przemienną z jedynką, jeżeli "$\cdot$" posiada element neutralny.
Definicja 6. Algebrę A nazwiemy algebrą z dzieleniem, jeżeli A nie ma dzielników zer oraz każdy element $a \in A\backslash\{0\}$ jest odwracalny w tej algebrze.
Stwierdzenie: Wprost z definicji widać, że na własności algebry duży wpływ posiada ciało $\mathbb{K}$. Można zastanowić się, jak wyglądają algebry z dzieleniem, gdy char $(\mathbb{K}) > 0$ (jest dodatnia), a jak, gdy char $(\mathbb{K}) = 0$.
Przykłady algebr z dzieleniem:
Kwaterniony $\mathbb{H}$.
Algebra czterowymiarowa kwaternionów powstała w XIX wieku, skonstruowana przez W. Hamiltona.
$\mathbb{H}$ jest algebrą nieprzemienną, łączną.
Jako przestrzeń wektorowa $\mathbb{H}$ posiada bazę złożoną z 1, i, j, k o tej własności, że $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ oraz $ij = k,\ ik = -j,\ ji = -k,\ jk = i, kj = -i$.
Standardowo każdy element $q \in \mathbb{H}$ da się jednoznacznie przedstawić w postaci normalnej kwaternionu: $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$.
Gdy $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, zapisujemy: $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$.
Podalgebra $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 + \mathbb{R}i$ jest izomorficzna z algebrą $\mathbb{C}$.
$\mathbb{H}$ możemy rozpatrywać jako algebrę nad $\mathbb{C}$: $\alpha 1 + \beta i + \gamma j + \delta k = (\alpha + \beta i)1 + (\gamma + \delta i)j \quad (\star)$
Sprzężenie kwaternionu: $\overline{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$.
Jeśli kwaternion nie posiada części rzeczywistej, czyli $\alpha = 0$, to $\overline{q} = -q$.
Łatwo zauważyć, że, gdy części rzeczywiste $\alpha = 0$, to kwaternion przyjmuje postać: $q = \beta i + \gamma j + \delta k$, i taka podalgebra, składająca się z kwaternionów takiej postaci, jest izomorficzna z $\mathbb{R}^3$, gdzie i, j, k są wersorami tej przestrzeni.
Przyklad 2: Oktawy.
Definicja 7: Odwzorowanie α nazwiemy asocjatorem, jeśli dla dowolnych elementów $x, y, z \in A$ zachodzi :

$$\alpha(x, y, z) = x(yz) - (xy)z$$

, gdzie α jest asocjatorem oraz α jest odwzorowaniem trzyliniowym $\alpha : A \times A \times A \to A$.
Oktawy stanowią 8-wymiarową rzeczywistą algebrę alternującą z dzieleniem. Dowolny element oktawy jest postaci $\mathbb{O} = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 + \cdots + a_6 \cdot e_6 + a_7 \cdot e_7$, gdzie$e_i^2 = -1$ dla $i = 1, \ldots, 7$.
Tabela mnożenia:
Zasady dla jednostek urojonych: $e_i e_j = -e_j e_i = -e_k$. Można zauważyć, że $(\mathbb{R}1)$ - centrum pierścienia.
Uwaga do $(\star)$:
Postać kwaternionu nad $\mathbb{C}$ $\alpha 1 + \beta i + \gamma j + \delta k = (\alpha + \beta i)1 + (j + \delta i)j$ wynika z konstrukcji Cayleya-Dicksona. Konstrukcja ta pozwala tworzyć wielowymiarowe algebry. Stosując ją dla $\mathbb{C}$, otrzymujemy $\mathbb{H}$, dla $\mathbb{H}$ otrzymujemy oktawy, a dla oktaw - sedeniony.
$\mathbb{H}$, oktawy i sedeniony nazywamy często liczbami hiperzespolonymi.

Uwaga (2). Nasze algebry można konstruować za pomoca metody zaproponowanej przez Clifforda. Algebry Clifforda powstają przez zastosowanie odpowiedniej konstrukcji: elementy algebry są postaci $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$, gdzie $a_i \in \mathbb{R}$, e_i - pewne jednostki urojone oraz $e_i^2 = \pm 1, e_ie_j = -e_je_i$ dla $i \neq j$.
Ogólnie algebry Clifforda definiuje się przez formę kwadratową q w n-wymiarowej przestrzeni wektorowej V.
$v^2 = q(v),\ vw + wv = q(v+w) - q(v) - q(w), \{e_1, \ldots e_n\}$ - baza algebry.
Cecha dla algebry Clifforda. Oznaczmy przez $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ indeks algebry Clifforda.
Liczba $p =$ określa ilość jednostek urojonych, których kwadrat jest równy $+1$.
Liczba $q =$ określa ilość jednostek urojonych, których kwadrat jest równy -1.
Indeks $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ wyznacza dokładność co do izomorfizmu.
Przykłady algebr Clifforda: $\mathbb{C}\ Cl \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, (\mathbb{R})$
liczby podwójne $Cl \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, (\mathbb{R})$
algebra czasoprzestrzeni Minkowskiego $Cl \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} (\mathbb{R})$
W nawiązaniu do przykładów algebr $\mathbb{H}$ i oktaw można zadać sobie pytanie: Ile jest skończenie wymiarowych łącznych algebr z dzieleniem? Co więcej, można zapytać, ile jest skończenie wymiarowych rzeczywistych alternujących algebr z dzieleniem.
Na obydwa pytania odpowiada twierdzenie Frobieniusa, które mówi: Nad ciałem $\mathbb{R}$ istnieją tylko trzy skończenie wymiarowe łączne algebry z dzieleniem: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Stosując ciało rzeczywiscie domknięte, można pokazać, że nad ciałem rzeczywiście domkniętym $\mathbb{R}$ istnieje tylko pięć skończenie wymiarowych alternujących algebr z dzieleniem: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, oktawy i sedeniony.
Uwaga: W zależności od asocjatora możemy mówić o kilku klasach algebr:

1. - $\alpha(x, y, z) = 0$ - algebra łączna
2. - $\alpha(x, x, y) = \alpha(y, x, x) = 0$ - algebra alternatywna
3. - $\alpha(x, y, x^2) = 0$ - algebra Jordana - jest to algebra przemienna, spełniająca warunek $\alpha(x, y, x^2) \equiv 0$

Algebry Liego
Niech A będzie algebrą nad ciałem $\mathbb{K}$, w której iloczyn określa się $[,]$, zwany dalej nawiasem Liego. Na mocy definicji algebry Liego odwzorowanie dwuliniowe $(a, b) \to [a, b]$ spełnia warunki:

(i) $[x, x] = 0$ $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (tożsamość Jacobiego)

Przykłady:

1. Weźmy algebrę macierzy $M_{nxn}(\mathbb{R})$, algebra ta z nawiasem $[A, B] = AB - BA$ tworzy algebrę Liego.
2. Różniczkowanie w algebrze A. Rózniczkowaniem na algebrze A nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy k-liniowe przekształcenie $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, które jest rózniczkowaniem pierścienia A, tj. $D(u+v) = D(u) + D(v), D(\lambda u) = \lambda D(u), D(u \cdot v) = D(u) \cdot v + u \cdot D(u) \forall_{u,v \in A}$ Zbiór różniczkowań $Der(A)$ jest przestrzenią liniową. Co więcej, jest to algebra Liego z nawiasem Liego zdefiniowanym w sposób następujący:
$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$, gdzie "$\circ$" oznacza złożenie.

Algebry Liego mają duże zastosowanie w fizyce (szczególnie grupy Liego).