Piotr Idzik 05.08.2009

# Zbiory niemierzalne a równanie Cauchy'ego

**Lemat 1.** *Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą dodatniej miary, wówczas istnieją takie liczby $a \in A$ oraz $b \in B$, że $a - b \in \mathbb{Q}$.*

*Dowód.* Ustalmy dowolne zbiory $A, B \in \mathbb{R}$ o dodatniej mierze. Zauważmy, że możemy założyć, że zbiory $A$ oraz $B$ są ograniczone. Niech $I$ będzie dowolnym domkniętym przedziałem takim, że $B \subset I$, dalej niech $0 < \varepsilon < \frac{\mu(A)\mu(B)}{3\mu(I)}$.

Zauważmy, że istnieje taki domknięty przedział $J$ o wymiernych końcach, że $\mu(J) < \mu(I)$ oraz:

$$\mu(A \cap J) > \frac{\mu(A)}{\mu(A)+\varepsilon}\mu(J) \tag{$\star$}$$

Przypuśćmy, że taki przedział nie istnieje. Niech $\{J_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ będzie rodziną domkniętych przedziałów o końcach wymiernych, długości mniejszej niż $\mu(I)$, nie spełniających $(\star)$, taką, że $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i$ i $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(J_i) < \mu(A) + \varepsilon$. Policzmy:

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (A \cap J_i)\right) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A \cap J_i) \leqslant \frac{\mu(A)}{\mu(A)+\varepsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \mu(J_i) < \mu(A)$$

Sprzeczność.

Niech $S = \{s \in \mathbb{Z} \colon (n\mu(J) + J) \cap I \neq \emptyset\}$. Zauważmy, że zbiór $S$ jest skończony, niech $s = |S|$. Zauważmy, że $(s-2)\mu(J) \leqslant \mu(I)$ stąd $s\mu(J) \leqslant \mu(I) + 2\mu(J) < 3\mu(I)$.

Przypuśćmy, że $B \cap \bigcup_{n\in S} ((A \cap J) + n\mu(J)) = \emptyset$, wtedy mielibyśmy:

$$\begin{aligned} s\mu(J) &= \mu\left(\bigcup_{n\in S} (J + n\mu(J))\right) \geqslant \mu(B) + \mu\left(\bigcup_{n\in S} ((A \cap J) + n\mu(J))\right) \\ &= \mu(B) + s\mu(A \cap J) > \mu(B) + s\frac{\mu(A)}{\mu(A)+\varepsilon}\mu(J) \end{aligned}$$

Skąd $\mu(B) < \frac{s\varepsilon\mu(J)}{\mu(A)+\varepsilon} < \frac{3\varepsilon\mu(I)}{\mu(A)}$, co jest sprzeczne z wyborem $\varepsilon$. Zatem lemat jest prawdziwy. □

**Twierdzenie 2.** *Jeżeli $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalną funkcją addytywną wówczas $f$ jest ciągła.*

*Dowód.* [1] Jak wiadomo funkcja addytywna jest ciągła $\Leftrightarrow \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} f(x) = xf(1)$.Rozważmy funkcję $g$ daną wzorem: $g(x) = f(x) - xf(1)$. Pokażemy, że $g(x) = 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że funkcja $g$ jest nieparzysta. Zdefiniujmy zbiory: $A = \{x \in \mathbb{R} \colon g(x) > 0\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R} \colon g(x) < 0\}$. Z mierzalności funkcji $f$ oraz faktu, że $B = -A$ wynika, że zbiory $A$ i $B$ są mierzalne oraz zachodzi równość $\mu(A) = \mu(B)$.

Przypuśćmy, że $\mu(A) = \mu(B) > 0$. Gdyby tak było, to na mocy lematu 1 istnieją takie liczby $a \in A$, $b \in B$, że $a - b \in \mathbb{Q}$. Policzmy:

$$0 < g(a) - g(b) = f(a) - af(1) - f(b) + bf(1) = f(a) - f(b) - f(1)(a-b) = f(a) - f(b) - f(a-b) = 0$$

Sprzeczność, zatem $\mu(A) = \mu(B) = 0$. ($g = 0$ p.w.)

Przypuśćmy, że istnieje takie $a \in \mathbb{R}$, że $g(a) \neq 0$. Rozważmy zbiór $C = \{x \in \mathbb{R} \colon g(x-a) = 0\}$. Zauważmy, że $C \subset A \cup B$ (ponieważ $g(x) \neq 0,\ x \in C$) oraz $\mu(\mathbb{R} \setminus C) = 0$. Sprzeczność, zatem $f$ jest funkcją ciągłą. □

[1]Przedstawiony dowód pochodzi od Wacława Sierpińskiego, został on opublikowany w 1920 roku. Analogiczne twierdzenie udowodnił, niezależnie od Sierpińskiego, Stefan Banach również w 1920 roku.

**Definicja 3.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^N$ będzie dowolnym zbiorem. Miarą wewnętrzną zbioru $A$ nazywamy liczbę:*

$$\mu_i(A) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F - domknięty}} \mu(F)$$

*Miarą zewnętrzną nazywamy liczbę:*

$$\mu_e(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ U - otwarty}} \mu(U)$$

**Twierdzenie 4.** *Jeżeli zbiór $A \subset \mathbb{R}^N$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, to $\mu_e(A) = \mu_i(A) = \mu(A)$*

**Twierdzenie 5.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^N$ będzie dowolnym zbiorem, wówczas jeżeli $\mu_i(A) = \mu_e(A) < \infty$ to zbiór $A$ jest mierzalny z sensie Lebesgue'a.*

**Definicja 6.** *Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^N$ jest nasycenie niemierzalny, jeżeli:*

$$\mu_i(A) = \mu_i(A') = 0$$

**Uwaga 7.** Wszystkie zbiory nasycenie niemierzalne są niemierzalne w sensie Lebesgue'a.

*Dowód.* Przypuśmy, że istnieje zbiór nasycenie niemierzalny $A$ mierzalny z sensie Lebesgue'a. Wówczas mamy:

$$\mu(\mathbb{R}^N) = \mu(A \cup A') = \mu(A) + \mu(A') = 0$$

Sprzeczność. □

**Twierdzenie 8.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^N$ będzie dowolnym zbiorem. Poniższe warunki są równoważne:*

(*i*) $\mu_i(A') = 0$

(*ii*) *dla każdego mierzalnego zbioru $E$ o dodatniej mierze zachodzi $A \cap E \neq \emptyset$*

(*iii*) *dla każdego mierzalnego zbioru $E$ zachodzi $\mu_e(A \cap E) = \mu(E)$*

(*iv*) *dla dowolnej kostki otwartej $I \subset \mathbb{R}^N$ zachodzi $\mu_e(A \cap I) = \mu(I)$*

**Definicja 9.** *Zdefiniujmy następującą rodzinę podzbiorów $\mathbb{R}^N$:*

$$\mathfrak{B} = \left\{ T \subset \mathbb{R}^N : \textit{każda funkcja addytywna } f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \textit{ ograniczona z góry na } T \textit{ jest ciągła} \right\}$$

**Twierdzenie 10** (Ostrowski)**.** *Jeżeli $T \subset \mathbb{R}^N$ oraz $\mu_i(T) > 0$ to $T \in \mathfrak{B}$.*

**Twierdzenie 11.** *Niech $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ będzie nieciągłym rozwiązaniem równania Cauchy'ego oraz niech $J \subset \mathbb{R}$ będzie dowolnym niezdegenerowanym przedziałem, wówczas $f^{-1}(J)$ jest zbiorem nasycenie niemierzalnym.*

**Twierdzenie 12.** *Niech $A \subset \mathbb{R}^N$ będzie nasycenie niemierzalnym zbiorem, wówczas dla dowolnego mierzalnego zbioru $B$ o dodatniej mierze, zbiór $A \cap B$ jest zbiorem niemierzalnym.*

*Dowód.* Zauważmy, że $\mu_i(A \cap B) \leqslant \mu_i(A) = 0$ (bo $A \cap B \subset A$), zatem $\mu_i(A \cap B) = 0$. Na mocy twierdzenia 8 $\mu_e(A \cap B) = \mu(B) > 0$, więc $\mu_e(A \cap B) \neq \mu_i(A \cap B)$. Na mocy twierdzenia 5 zbiór $A \cap B$ jest zbiorem niemierzalnym. □

**Wniosek 13.** Każdy zbiór $B \subset \mathbb{R}^N$ o dodatniej mierze zewnętrznej zawiera zbiór niemierzalny.

# Literatura

[1] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, PWN, Katowice 1985

[2] S.Hartman, J.Mikusiński, *Teoria miary i całki Lebesgue'a*, PWN, Warszawa 1957

[3] S. Saito, *Cauchy Functional Equation*, Fukuoka 2006