wybrano z książki S. Łojasiewicza *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Biblioteka Matematyczna tom 46

1. Całka Riemanna-Stieltjesa. Warunki istnienia.

Definicja 1. Ustalmy $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dla podziału $a = x_0 < \ldots < x_k = b$ i punktów pośrednich ξ_i, gdzie $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$, utwórzmy sumę aproksymacyjną

$$S = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]. \tag{1}$$

Jeżeli dla każdego ciągu podziałów $a = x_0^n < \ldots < x_{k_n}^n = b$ spełniającego warunek

$$\lim_{n\to\infty} \max_i |x_i^n - x_{i-1}^n| = 0, \tag{2}$$

przy dowolnych punktach pośrednich $x_{i-1}^n \leqslant \xi_i^n \leqslant x_i^n$, ciąg sum aproksymacyjnych

$$S_n = \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^n)[g(x_i^n) - g(x_{i-1}^n)] \tag{3}$$

zmierza do jednej i tej samej granicy skończonej, to granicę tę nazywamy *całką Riemanna-Stieltjesa* po przedziale $[a,b]$ z funkcji f względem funkcji g i oznaczamy ją symbolem

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

oraz mówimy, że funkcja f jest *całkowalna (w sensie Riemanna-Stieltjesa)* na przedziale $[a,b]$ względem funkcji g. Innymi słowy, określamy całkę Riemanna-Stieltjesa jako granicę skończoną

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \lim_{\max_i |x_i - x_{i-1}| \to 0} \sum_i f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] \tag{4}$$

(po zbiorze podziałów z punktami pośrednimi).

Uwaga 1. Podstawienie ciągłe i rosnące $x = x(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, nie wpływa ani na całkowalność, ani na wartość całki:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_\alpha^\beta f\left(x(t)\right) dg\left(x(t)\right). \tag{5}$$

Uwaga 2. Zachodzą następujące równości:
1. $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$;
2. jeżeli $g(x) = const$, to $\int_a^b f(x)dg(x) = 0$;
3. jeżeli $a < c < b$, $f(x)$ jest ciągła w c, $g(x) = 0$ dla $x \leqslant c$, $g(x) = 1$ dla $x > c$, to $\int_a^b f(x)dg(x) = f(c)$;
4. jeżeli f jest ciągła i g jest klasy C^1, to, po napisaniu sumy aproksymacyjnej (1) w postaci

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)g'(\tilde{\xi}_i)(x_i - x_{i-1}),$$

według twierdzenia o wartości średniej Lagrange'a, widzimy, że

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx. \tag{6}$$

Definicja 2. Mówimy, że $a = x'_0 < \ldots < x'_l = b$ jest *podpodziałem* dla podziału $a = x_0 < \ldots < x_k = b$, jeżeli $x_i = x'_{\alpha_i}$, gdzie $0 = \alpha_0 < \ldots < \alpha_k = l$.

Lemat 1. *Całka*

$$\int_a^b f(x)dg(x),$$

istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że gdy S jest sumą aproksymacyjną dla podziału P takiego, że $\delta(P) = \max_i |x_i - x_{i-1}| < \delta$, zaś S' sumą aproksymacyjną dla podpodziału, to

$$|S' - S| < \varepsilon.$$

Definicja 3. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Liczbę

$$W_a^b(f) = \sup_{a=x_0<\ldots<x_n=b} \sum_1^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \tag{7}$$

(skończoną lub nie) nazywamy *wahaniem funkcji f* na przedziale $[a,b]$.
Oznaczmy również

$$\operatorname*{osc}_{[a,b]} f = \sup_{a\leqslant x\leqslant y\leqslant b} |f(y) - f(x)|. \tag{8}$$

Lemat 2. *Wahanie jest funkcją addytywną przedziału:*

$$W_a^c(f) = W_a^b(f) + W_b^c(f).$$

Lemat 3. *Jeżeli S jest sumą aproksymacyjną dla podziału $a = x_0 < \ldots < x_k = b$, zaś S' sumą aproksymacyjną dla podpodziału, to*

$$|S' - S| \leqslant \sum_{i=1}^k (\operatorname*{osc}_{[x_{i-1},x_i]} f) W_{x_{i-1}}^{x_i}(g).$$

Lemat 4. *Jeżeli całka $\int_a^b fdg$ istnieje, S jest sumą aproksymacyjną dla podziału $a = x_0 < \ldots < x_k = b$ i $\operatorname{osc}_{[x_{i-1},x_i]} f < \varepsilon$ dla $i = 1, \ldots, k$, to*

$$|S - \int_a^b fdg| < \varepsilon \cdot W_a^b(g).$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli całka $\int_a^b fdg$ istnieje, to w każdym punkcie przedziału $[a,b]$ przynajmniej jedna z funkcji f, g musi być ciągła.*

Lemat 5. *Jeżeli f jest funkcją o wahaniu skończonym w $[a,b]$, ciągłą prawostronnie (lewostronnie) w x_0, to wahanie*

$$x \to W_a^x(f)$$

jest funkcją prawostronnie (lewostronnie) ciągłą w x_0.

Twierdzenie 2. *Niech f będzie funkcją ograniczoną, zaś g funkcją o wahaniu skończonym na przedziale $[a,b]$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia całki $\int_a^b fdg$ jest każdy z nastepujących warunków:*

(A) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego podziału takiego, że $\max_i |x_i - x_{i-1}| < \delta$,

$$\sum_{i=1}^n (\operatorname*{osc}_{[x_{i-1},x_i]} f)|g(x_i) - g(x_{i-1})| \leqslant \varepsilon. \tag{9}$$

(B) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego podziału takiego, że $\max_i |x_i - x_{i-1}| < \delta$,

$$\sum_{i=1}^n (\operatorname*{osc}_{[x_{i-1},x_i]} f) W_{x_{i-1}}^{x_i}(g) \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

Lemat 6. *Jeżeli $f = \varphi - \psi$ jest rozkładem kanonicznym Jordana oraz $a \leqslant x < y \leqslant b$, to*

$$W_x^y(f) = W_x^y(\varphi) + W_x^y(\psi).$$

Twierdzenie 3. *Jeżeli $g = \varphi - \psi$ jest rozkładem kanonicznym Jordana funkcji g o wahaniu skończonym na przedziale $[a, b]$, zaś f funkcją ograniczoną, to całka $\int_a^b f dg$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją całki $\int_a^b f d\varphi$ i $\int_a^b f d\psi$.*

Twierdzenie 4. *Jeżeli f jest całkowalna względem g na przedziale $[a, b]$, to również i na każdym przedziale częściowym $[c, d] \subset [a, b]$.*

Twierdzenie 5. *Jeżeli f jest ciągła, zaś g o wahaniu skończonym w przedziale $[a, b]$, to całka $\int_a^b f(x)dg(x)$ istnieje.*

Lemat 7. *Jeżeli f jest funkcją o wahaniu skończonym w $[a, b]$, to*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \operatorname*{osc}_{[a,b]} f \leqslant W_a^b(f).$$

Lemat 8. *Wahanie jest funkcją monotoniczną przedziału:*

$$W_c^d(f) \leqslant W_a^b(f) \quad \text{dla} \quad a \leqslant c < d \leqslant b.$$

Twierdzenie 6. *Przy założeniu, że f, g są funkcjami o wahaniu skończonym w $[a, b]$, całka $\int_a^b f(x)dg(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy f i g nie mają wspólnych punktów nieciągłości.*

2. Własności całki.

Twierdzenie 7. *Jeżeli f jest całkowalna w $[a, b]$ względem g i $|f(x)| \leqslant M$ w $[a, b]$, to*

$$\left| \int_a^b f(x)dg(x) \right| \leqslant MW_a^b(g). \tag{11}$$

Twierdzenie 8. *Jeżeli f_1 i f_2 są całkowalne w $[a, b]$ względem funkcji rosnącej g, to*

$$\int_a^b f_1(x)dg(x) \leqslant \int_a^b f_2(x)dg(x), \quad \text{gdy} \quad f_1(x) \leqslant f_2(x) \text{ w } [a, b]. \tag{12}$$

Twierdzenie 9. *Jeżeli f jest całkowalna w $[a, c]$ względem g, to*

$$\int_a^c f dg = \int_a^b f dg + \int_b^c f dg. \tag{13}$$

Twierdzenie 10. *Jeżeli f_1, f_2 są całkowalne w $[a, b]$ względem g, to również i $c_1 f_1 + c_2 f_2$, przy czym*

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg = c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg. \tag{14}$$

Twierdzenie 11. *Jeżeli f jest całkowalna w $[a, b]$ względem g_1 i względem g_2, to również i względem $c_1 g_1 + c_2 g_2$, przy czym*

$$\int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_a^b f dg_1 + c_2 \int_a^b f dg_2. \tag{15}$$

Twierdzenie 12 (o wartości średniej). *Jeżeli f jest całkowalna w $[a, b]$ względem funkcji monotonicznej g, to*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \mu[g(b) - g(a)], \quad \text{gdzie} \quad \inf_{[a,b]} f(x) \leqslant \mu \leqslant \sup_{[a,b]} f(x). \tag{16}$$

Twierdzenie 13 (o całkowaniu przez części). *Jeżeli f, g są funkcjami o wahaniu skończonym na przedziale $[a, b]$, nie mającymi wspólnych punktów nieciągłości, to*

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{17}$$

Twierdzenie 14 (o zmianie funkcji całkującej). *Jeżeli funkcja ograniczona φ jest całkowalna względem funkcji g o wahaniu skończonym w $[a, b]$, to $G(x) = \int_a^x \varphi(t)dg(t)$ jest funkcją o wahaniu skończonym na przedziale $[a, b]$. Wtedy dla każdej funkcji f ograniczonej w $[a, b]$*

$$\int_a^b f(x)dG(x) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dg(x), \tag{18}$$

o ile jedna z całek istnieje.

Twierdzenie 15. *Jeżeli f_n i f są całkowalne w $[a, b]$ względem g i $f_n(x) \to f(x)$ jednostajnie w $[a, b]$, to*

$$\int_a^b f_n dg \to \int_a^b f dg. \tag{19}$$

Lemat 9. *Jeżeli funkcje f i g są funkcjami o wahaniu skończonym na przedziale $[a, b]$, to $\alpha f + \beta g$ jest funkcją o wahaniu skończonym oraz*

$$W_a^b(\alpha f + \beta g) \leqslant |\alpha| W_a^b(f) + |\beta| W_a^b(g).$$

Twierdzenie 16 (drugie twierdzenie Helly'ego). *Załóżmy, że f jest ciągła, zaś g o wahaniu skończonym w $[a, b]$. Jeżeli $g_n(x) \to g(x)$ w zbiorze Z gęstym w $[a, b]$, zawierającym punkty a i b i jeżeli ciąg $\{W_a^b(g_n)\}$ jest ograniczony, to*

$$\int_a^b f dg_n \to \int_a^b f dg. \tag{20}$$