Konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych przy pomocy przekrojów Dedekinda

Szymon Draga

Szczyrk, 28-30 listopada 2008r.

1. Definicja przekroju zbioru liczb wymiernych. Przykłady.

   Def. Przekrojem zbioru $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych nazywamy rozbicie zbioru $\mathbb{Q}$ na dwie niepuste klasy A i A' spełniające warunki:

   - Każda liczba wymierna należy do dokładnie jednej z klas.
   - Jeśli $a \in A$ i $a' \in A'$, to $a < a'$.

   Przekrój taki oznaczamy $A|A'$, przy czym zbiór A nazywamy klasą dolną, zaś zbiór A' klasą górną.

   Mówimy, że zdefiniowane w ten sposób przekroje wyznaczają liczby rzeczywiste. Dla uproszczenia możemy utożsamić liczby rzeczywiste z przekrojami, które je wyznaczają.

2. Rodzaje przekrojów. Umowa jednoznaczności wyznaczenia liczby wymiernej przez przekrój.

   Łatwo zauważyć, że liczba wymierna jest wyznaczona przez 2 różne przekroje. Aby uniknąć niejednoznaczności będziemy zawsze brali pod uwagę przekrój niezawierający w klasie dolnej liczby największej.

3. Relacja nierówności między liczbami rzeczywistymi.

   Def. Niech $A|A'$ i $B|B'$ będą przekrojami wyznaczającymi odpowiednio liczby rzeczywiste α i β. Wówczas:
   $\alpha < \beta \iff (A \subset B \text{ i } A \neq B)$

4. Działania na liczbach rzeczywistych.

   Def. Sumą liczb rzeczywistych α i β wyznaczonych odpowiednio przez przekroje $A|A'$ oraz $B|B'$ nazywamy liczbę rzeczywistą wyznaczoną przez przekrój $A + B|A' + B'$.

   Def. Iloczynem dodatnich liczb rzeczywistych α i β nazywamy liczbę rzeczywistą γ wyznaczoną przez przekrój $C|C'$, taki że:
   $C = \{ab \in \mathbb{Q} : a < \alpha,\ b < \beta,\ a, b \in \mathbb{Q}_+\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$
   Jeśli $\alpha < 0$ i $\beta > 0$, to $\alpha\beta = -(-\alpha)\beta$.

Jeśli $\alpha > 0$ i $\beta < 0$, to $\alpha\beta = -\alpha(-\beta)$.
Jeśli $\alpha < 0$ i $\beta < 0$, to $\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$.
Ponadto przyjmujemy, że iloczyn dowolnej liczby rzeczywistej i 0 wynosi 0.

5. **Lemat:** Pomiędzy dwoma liczbami rzeczywistymi α i β leży liczba wymierna.

   Dowód: Z definicji nierówności między liczbami rzeczywistymi wynika, że istnieje taka liczba wymierna r, że: $\alpha \leq r < \beta$. Jednak w klasie B nie istnieje liczba największa, zatem zwiększając w razie potrzeby liczbę r wykluczamy równość.

6. Dowód, że tak zdefiniowany zbiór $\mathbb{R}$ jest ciągły. Przekrój zbioru $\mathbb{R}$ wyznacza liczbę rzeczywistą.

   Przekrój zbioru liczb rzeczywistych definijemy analogicznie jak przekrój zbioru $\mathbb{Q}$.

   Twierdzenie (Dedekinda): Jeżeli $\mathcal{A}|\mathcal{A}'$ jest przekrojem zbioru liczb rzeczywistych, to w klasie dolnej istnieje liczba największa, albo w klasie górnej istnieje liczba najmniejsza.

   Dowód: Załóżmy, że istnieje przekrój $\mathcal{A}|\mathcal{A}'$ zbioru liczb rzeczywistych, taki że w klasach $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ nie istnieją odpowiednio liczba największa, ani najmniejsza. Niech A będzie zbiorem liczb wymiernych należących do $\mathcal{A}$, a A' zbiorem liczb wymiernych należących do $\mathcal{A}'$. Wwczas $A|A'$ jest przekrojem zbioru liczb wymiernych wyznaczającym pewną liczbę rzeczywistą α. Zgodnie z definicją przekroju α musi należeć do jednej z klas $\mathcal{A}$ albo $\mathcal{A}'$. Bez straty ogólności, przyjmijmy, że $\alpha \in \mathcal{A}$. Z założenia wynika, że istnieje taka liczba rzeczywista $\beta \in \mathcal{A}$, że $\alpha < \beta$. Na mocy lematu pomiędzy α i β istnieje liczba wymierna r. Z tego, że $r \in \mathcal{A}$ wynika $r \in A$, zaś z tego, że $\alpha < r$ wynika $r \in A'$. Otrzymana sprzeczość dowodzi tezy.

   Bezpośrednio z twierdzenia Dedekinda wynika aksjomat ciągłości.
   Rzeczywiście, niech X będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}$. Tworzymy przekrój w zbiorze liczb rzeczywistych w następujący sposób: do klasy górnej zaliczamy wszystkie ograniczenia górne zbioru X, a do klasy dolnej wszystkie pozostałe liczby rzeczywiste. Na mocy twierdzenia Dedekinda w jednej z klas istnieje element ekstremalny. Jeśli w klasie dolnej istniałby element największy, to wtedy byłby ograniczeniem górnym X i musiałby należeć do klasy górnej. Stąd wynika, że sytuacja ta jest niemożliwa. Zatem w klasie górnej istnieje element najmniejszy, który oczywiście jest kresem górnym X.

7. Dowód mierzalności odcinków.

   Szkic dowodu: Załóżmy, że mamy dany odcinek jednostkowy E oraz odcinek Σ o nieznanej długości. Jeśli odcinek Σ jest współmierny z odcinkiem E, to długość $l(\Sigma)$ jest liczbą wymierną. Jeśli zaś odcinek Σ jest niewspółmierny z odcinkiem E, to za długość $l(\Sigma)$ przyjmujemy:

$$l(\Sigma) = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\} \cup \{l(S) \in \mathbb{Q} : S \subset \Sigma\} | \{l(S') \in \mathbb{Q} : \Sigma \subset S'\}$$

Uwaga: Powyższe rozumowanie nie jest ścisłym dowodem, ponieważ nie zdefiniowaliśmy pojęcia długości.

8. Aksjomat ciągłości prostej.

   Jeśli mamy daną prostą z ustalonym punktem O, to dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej α istnieją dokłdnie dwa punkty A tej prostej takie, że: $OA = \alpha$.

9. Istnienie bijekcji zbioru $\mathbb{R}$ na prostą.

   Wynika natychmiast z dwóch poprzednich punktów.

10. Przykłady zastosowań liczb rzeczywistych - istnienie pierwiastków, logarytmów.

Więcej informacji można znaleźć na przykład w:
G. M. Fichtenholtz, Rachunek różniczkowy i całkowy, t. I, PWN