

Mieszane przestrzenie Tsirelsona

Tomasz Kania
Lancaster University

20 marca 2011

Przestrzenie Banacha są obiektami matematycznymi, które z jednej strony cechuje elegancka i przejrzysta aksjomatyka (zaproponowana niezależnie przez S. Banacha i N. Wienera), a z drugiej strony ogromna różnorodność. Już od początku krystalizowania się teorii przestrzeni Banacha, jako samodzielnej dyscypliny matematycznej, zadawano sobie takie pytania jak:

- Czy każda przestrzeń Banacha zawiera bezwarunkowy ciąg bazowy?
- Czy każdą przestrzeń Banacha można przedstawić w postaci topologicznej sumy prostej dwóch jej nieskończenie wymiarowych podprzestrzeni?
- Czy każda przestrzeń Banacha jest izomorficzna ze swoimi podprzestrzeniami kowymiaru 1?
- Czy każda przestrzeń Banacha zawiera kopię przestrzeni c_0 bądź przestrzeni ℓ^p dla pewnej liczby $1 \leq p < \infty$?

O ile w przypadku przestrzeni Hilberta odpowiedź na każde z powyższych pytań jest pozytywna (tj. można dość łatwo skonstruować "teorię strukturalną" przestrzeni Hilberta), o tyle w przypadku przestrzeni Banacha pytania te (postawione jeszcze we Lwowie w latach trzydziestych XX-ego wieku) pozostawały przez wiele dziesięcioleci bez odpowiedzi. W 1974 roku Boris Tsirelson podał przykład refleksywnej przestrzeni Banacha (*przestrzeń Tsirelsona*), która nie zawiera kopii żadnej przestrzeni ℓ^p , będącej jednocześnie kontrprzykładem do ostatniego z powyższych pytań. W referacie przyjrzymy się konstrukcji przestrzeni Tsirelsona, która okazała się być na tyle elastyczna, że przyczyniła się do znalezienia odpowiedzi (negatywnych) na resztę z powyższych pytań (prace T. Gowersa i B. Maurey'a, E. Odella, T. Schlumprechta).