O mierze Hausdorffa

Szymon Draga

Szczyrk, 12 listopada 2011r.

1 Wprowadzenie

Jedno-, dwu- i trójwymiarowa miara Lebesgue'a wiernie odtwarza nasze wyobrażenia odpowiednio długości, pola i objętości. Ma ona jednak pewną wadę – nie można przy jej użyciu „mierzyć" długości krzywych czy pól powierzchni. W pewnym sensie rozszerzeniem miary Lebesgue'a jest miara Hausdorffa, która posiada tę „umiejętność".

2 Konstrukcja

Definicja 1. Średnicą zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy liczbę określoną następująco:

$$\operatorname{diam} A = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \varnothing \\ \sup\{\|x-y\| \in \mathbb{R} \colon x, y \in A\}, & \text{gdy } A \neq \varnothing. \end{cases}$$

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ i $m \geqslant 0$. Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$h^*_{m,\varepsilon}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} c_m (\operatorname{diam} U_i)^m \colon A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \ \operatorname{diam} U_i < \varepsilon \text{ dla } i \in \mathbb{N} \right\}$$

dla $\varepsilon > 0$ i pewnej stałej c_m. Można przyjąć, że zbiory U_i są dowolne, otwarte lub domknięte. Nie wystarczy jednak ograniczyć się do kul [2]. Zauważmy, że funkcja $h^*_{m,\varepsilon}(A)$ zmiennej ε jest rosnąca. Istnieje zatem granica

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h^*_{m,\varepsilon}(A). \tag{1}$$

Definicja 2. Granicę (1) nazywamy m-wymiarową miarą zewnętrzną Hausdorffa zbioru A i oznaczamy $h^*_m(A)$.

Twierdzenie 3. *Funkcja*

$$h^*_m \colon 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty],$$

która danemu zbiorowi przyporządkowuje jego m-wymiarową miarę zewnętrzną Hausdorffa jest miarą zewnętrzną.

Dowód. Warunek $h^*_m(\varnothing) = 0$ oraz monotoniczność są oczywiste, wystarczy pokazać przeliczalną podaddytywność.

W tym celu ustalmy $\varepsilon, \eta > 0$. Niech $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$, bez straty ogólności możemy założyć, że $h_m^*(A_i) < \infty$ dla $i \in \mathbb{N}$. Niech dalej $(A_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ będzie takim pokryciem zbioru A_i, że $\operatorname{diam} A_{i,j} < \varepsilon$ dla $j \in \mathbb{N}$ oraz

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_m(\operatorname{diam} A_{i,j})^m < h_{m,\varepsilon}^*(A_i) + \frac{\eta}{2^i}$$

dla $i \in \mathbb{N}$. Stąd

$$h_{m,\varepsilon}^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty} c_m(\operatorname{diam} A_{i,j})^m < \sum_{i=1}^{\infty} h_{m,\varepsilon}^*(A_i) + \eta.$$

Przechodząc do granicy gdy $\eta \to 0$ oraz korzystając z monotoniczności $h_{m,\varepsilon}^*$, uzyskujemy nierówności

$$h_{m,\varepsilon}^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} h_{m,\varepsilon}^*(A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} h_m^*(A_i).$$

Z kolei przechodząc do granicy przy $\varepsilon \to 0$, otrzymujemy żądaną podaddytywność. □

Z twierdzenia Carathéodory'ego wynika, że rodzina $\mathcal{H}_m$ podzbiorów $\mathbb{R}^n$ spełniających warunek Carathéodory'ego jest σ-ciałem, zaś

$$h_m^* \restriction \mathcal{H}_m \tag{2}$$

jest miarą (łatwo zauważyć, że miara ta jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia).

Definicja 4. Miarę (2) nazywamy m-wymiarową miarą Hausdorffa i oznaczamy h_m.

Bezpośrednio z miarą Hausdorffa związane jest pojęcie wymiaru Hausdorffa.

Definicja 5. Wymiarem Hausdorffa zbioru A nazywamy liczbę

$$\inf\{m \geqslant 0 \colon h_m^*(A) = 0\}.$$

3 Związek z miarą Lebesgue'a

Przykład 6. Łatwo zauważyć, że w przypadku prostej (tj. $n = 1$), liczba $h_{1,\varepsilon}^*(A)$ nie zależy od ε, i że h_1 jest (jednowymiarową) miarą Lebesgue'a. Na przykład $h_1([0,1]) = 1$, co jest oczywiste. Podobnie, w przypadku płaszczyzny,

$$h_1([0,1] \times \{0\}) = 1.$$

Istotnie, nierówność

$$h_1([0,1]) \leqslant h_1([0,1] \times \{0\})$$

wynika z nierówności

$$\operatorname{diam}\big(U \cap (\mathbb{R} \times \{0\})\big) \leqslant \operatorname{diam} U,$$

która jest prawdziwa dla dowolnego $U \subset \mathbb{R}^2$ (zbiór $U \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ traktujemy jak podzbiór prostej). Z kolei nierówność przeciwna wynika z inkluzji

$$\left\{ (U_i)_{i\in\mathbb{N}} \colon \ [0,1] \times \{0\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \subset \mathbb{R} \times \{0\}, \ \operatorname{diam} U_i < \varepsilon \right\} \subset$$
$$\subset \left\{ (U_i)_{i\in\mathbb{N}} \colon \ [0,1] \times \{0\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \subset \mathbb{R}^2, \ \operatorname{diam} U_i < \varepsilon \right\}$$

prawdziwej dla dowolnego $\varepsilon > 0$ (podobnie jak wcześniej, zbiory U_i z pierwszej rodziny możemy utożsamiać z pozbiorami prostej). Dalej,

$$h_1 \left([0,1] \times \{0,1\} \right) = 2,$$

co jest zgodne z intuicją i oczekiwaniami. Przykład ten ma na celu również zobrazowanie roli, jaką w definicji miary Hausdorffa odgrywa ε. Mianowicie, gdyby go pominąć, to

$$h_1 \left([0,1] \times \{0,1\} \right) = \sqrt{2},$$

co nie powinno mieć miejsca.

Okazuje się, że przyjmując

$$c_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2^m \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)},$$

miara Hausdorffa zachowuje się tak, jak tego od niej oczekujemy. Fakt, który to obrazuje, wyraża następujące, nietrywialne twierdzenie, które przytoczymy tu bez dowodu (można go znaleźć na przykład w [1]).

Twierdzenie 7. *Niech ℓ_n będzie n-wymiarową miarą Lebesgue'a, zaś $\mathcal{L}_n$ σ-ciałem podzbiorów $\mathbb{R}^n$ mierzalnych w sensie Lebesgue'a. Wówczas $\mathcal{H}_n = \mathcal{L}_n$ oraz $h_n(A) = \ell_n(A)$ dla każdego $A \in \mathcal{H}_n$.*

Z powyższego twierdzenia wynika, że jeżeli m jest liczbą naturalną nie większą od n, to m-wymiarowa miara Hausdorffa obcięta do pozbiorów mierzalnych pewnej m-wymiarowej podprzestrzeni afinicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest m-wymiarową miarą Lebesgue'a. Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że owa restrykcja zależy od n, jednak rozumowanie podobne do tego z przykładu 6 pozwala stwierdzić, że tak nie jest.

Literatura

[1] Patrick Billingsley, *Probability and Measure.* 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1986.

[2] „Hausdorff measure” w *Wikipedia*, http://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorff_measure.