Metody numeryczne równań różniczkowych zwyczajnych

Marcin Jenczmyk
m.jenczmyk@knm.katowice.pl

9 maja 2015

Zdefiniowanie problemu

Omawiany problem dotyczyć będzie numerycznego sposobu rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych, tzn. układów równań postaci

$$\begin{cases} x_1^{(n)}(t) = f_1(t, x_1(t), \dot{x}_1(t), \ldots, x_1^{(n-1)}, \ldots, x_k(t), \dot{x}_k(t), \ldots, x_k^{(n-1)}) \\ x_2^{(n)}(t) = f_2(t, x_1(t), \dot{x}_1(t), \ldots, x_1^{(n-1)}, \ldots, x_k(t), \dot{x}_k(t), \ldots, x_k^{(n-1)}) \\ \vdots \\ x_k^{(n)}(t) = f_k(t, x_1(t), \dot{x}_1(t), \ldots, x_1^{(n-1)}, \ldots, x_k(t), \dot{x}_k(t), \ldots, x_k^{(n-1)}) \end{cases}$$

z zadanymi warunkami początkowymi

$$x_i(t_0) = x_i, \dot{x}_i(t_0) = x_i^1, \ldots, x_i^{(n-1)}(t_0) = x_i^{n-1}, i = 1 \ldots, k$$

gdzie $x_1, \ldots, x_k$ są funkcjami o odpowiedniej regularności.

Zdefiniowanie problemu

Zauważmy, że rozwiązanie problemu można sprowadzić do problemu numerycznego rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych stopnia pierwszego - każde równanie n-tego stopnia można sprowadzić do układu n równań stopnia pierwszego.

Zdefiniowanie problemu

Np. równanie różniczkowe zwyczajne trzeciego stopnia z zadanymi warunkami początkowymi

$$x^{(3)}(t) = f(t, x, \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$$
$$x(t_0) = x_0,\ \dot{x}(t_0) = x_0^1,\ \ddot{x}(t_0) = x_0^2$$

można za pomocą podstawienia $z = \ddot{x}$, $y = \dot{x}$ sprowadzić do układu trzech równań

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f(t, x, y, z), & z(t_0) = x_0^2 \\ \dot{y}(t) = z(t, x, y), & y(t_0) = x_0^1 \\ \dot{x}(t) = y(t, x), & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Zdefiniowanie problemu

Ponadto rozważać możemy jedynie równania różniczkowe pierwszego stopnia - metody omówione poniżej będą miały zastosowanie zarówno dla układów równań różniczkowych zwyczajnych, jak i pojedynczych równań.

Metoda Eulera

Rozważmy zadanie Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Zapisując równanie w postaci

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

i "mnożąc" obie strony przez dx (traktując tym samym dx jako infinitezymalny przyrost funkcji $x(t)$ przy infinitezymalnm przyroście jej argumentu dt) otrzymujemy

$$dx = f(t, x)dt.$$

Metoda Eulera

Wyznacza to iteracyjną metodę Eulera: przy zadanej wartości rozwiązania x_i w punkcie t_i można uzyskać wartość rozwiązania w punkcie $t_{i+1} = x + h$ dla wybranej wartości kroku czasowego h

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i). \tag{1}$$

Użycie metody w celu rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego na przedziale $[t_0, t_f]$ polega na podziale przedziału na M części o długości h, "wystartowanie" w punkcie t_0 na podstawie warunku początkowego, oraz iteracji zgodnie z równaniem 1.

Metoda Eulera

W i-tym kroku rząd elementu w rozwinięciu Taylora, który zaniedbujemy to $\ddot{x}(c_i)\frac{h^2}{2}$. Wobec tego sumaryczny błąd rozwiązania po M krokach podlega oszacowaniu

$$\sum_{i=1}^{M} \ddot{x}(c_i)\frac{h^2}{2} \leqslant M\ddot{x}(c)\frac{h^2}{2} = \ddot{x}(c)\frac{Mh}{2}h = \ddot{x}(c)\frac{t_f - t_0}{2}h = O(h).$$

Metoda Eulera

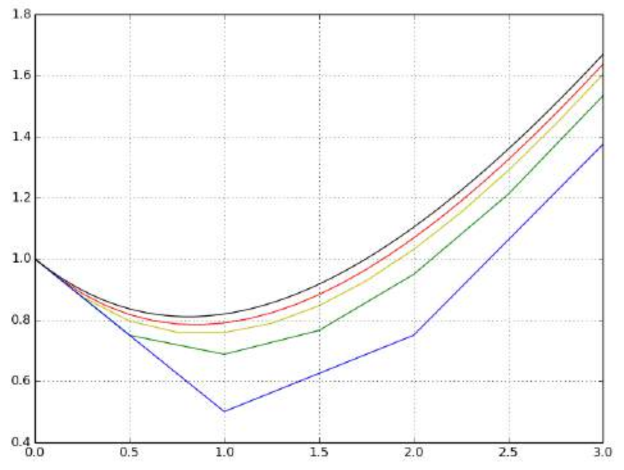
Dla przykładu rozważmy zadanie Cauchy'ego

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{t-x}{2}; \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Zgodnie z metodą Eulera, dobieramy wartość kroku czasowego h, a następnie tworzymy ciąg wartości poszukiwianej funkcji $x_{i+1} = x_i + h\frac{t-x}{2}$. Startując z punktu $(0, 1)$ dla $h = \frac{1}{2}$ otrzymujemy ciąg dyskretnych punktów oraz wartości rozwiązania

$$(0, 1), (0.5, 0.75), (1.0, 0.6875), (1.5, 0.7656),$$
$$(2.0, 0.9492), (2.5, 1.2119), (3.0, 1.5339)$$

Metoda Eulera



Metoda Eulera

Wszystkie omawiane metody pozwalają na rozwiązywanie układów równań różniczkowych zwyczajnych. Rozpartując układ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) + by(t) \\ \dot{y}(t) = cx(t) - dy(t) \end{cases}$$

z zadanymi warunkami początkowymi $x(t_0) = x_0, \; y(t_0) = y_0$ możemy sformułować procedurę iteracyjną

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -ax_i + by_i \\ cx_i - dy_i \end{bmatrix}.$$

Metody Rungego-Kutty

Metody Rungego-Kutty są naturalnym rozwinięciem metody Eulera - zamiast poprzestawać na rozwinięciu Taylora z dokładnością do pierwszego rzędu w metodzie rzędu N postulujemy iterowanie wartości poszukiwanej funkcji wg wzoru

$$x_{i+1} = x_i + h \sum_{j=1}^{N} w_j k_j,$$

gdzie

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, x_i) \\ k_2 &= f(t_i + a_1 h, x_i + b_1 h k_1) \\ k_3 &= f(t_i + a_2 h, x_i + b_2 h k_1 + b_3 h k_2) \\ &\vdots \\ k_N &= \ldots \end{aligned}$$

Metody Rungego-Kutty

Wartości współczynników w_j, k_j, a_k, b_l można uzyskać na podstawie rozwinięcia x(t) w szereg Taylora z dokładnością do wyrazu N-tego rzędu. Np. dla metody drugiego rzędu

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + h\left(w_1 k_1 + w_2 k_2\right) \\
&= x_i + h w_1 f(t_i, x_i) + h w_2 f(t_i + a_1 h, x_i + b_1 h k_1) \\
&\approx x_i + h w_1 f(t_i, x_i) + h w_2 f(t_i, x_i) + h^2 w_2 \left(a_1 \frac{\partial f}{\partial t} + b_1 k_1 \frac{\partial f}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

podczas gdy

$$
x(t_i + h) \approx x(t_i) + h f(t_i, x_i) + \frac{h^2}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + f(t_i, x_i)\frac{\partial f}{\partial x}\right].
$$

Metody Rungego-Kutty

Otrzymujemy w ten sposób układ 3 równań z czteroma niewiadomymi

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 a_1 = \frac{1}{2} \\ w_2 b_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Pozwala nam to na pewną dowolność w rozwiązaniu. Jednym z rozwiązań jest $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ oraz

$$x_{i+1} = x_i + hk_2,$$

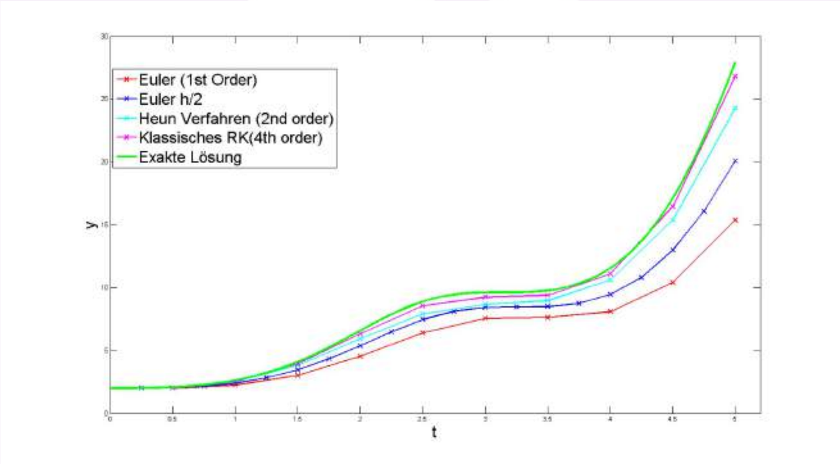
gdzie $k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hk_1)$, $k_1 = f(t_i, x_i)$.

Metody Rungego-Kutty

W ogólności przy tworzeniu metody N-tego rzędu rozwiązywany układ będzie miał mniejszy rozmiar niż ilość niewiadomych, co pozwala na utworzenie większej ilości metod danego rzędu.

Błąd metody Rungego-Kutty N-tego rzędu jest rzędu $O(h^N)$ - rozumowanie jest analogiczne do szacowania błędu metody Eulera.

Metody Rungego-Kutty



Literatura

- John H. Mathews, Kurtis D. Fink: *Numerical Methods Using MATLAB, Third Edition*, Prentice Hall, 1999
- E. Majchrzak, B. Mohnacki: *Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne i algorytmy*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 1999

Dziękuję za uwagę!