Wielomiany

1. Udowodnij, że jeżeli wielomian $f(x) = x^6 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste, to $a = b = c = d = 0$.

2. Dany jest wielomian $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeżeli przyjmuje on dla czterech parami różnych całkowitych argumentów wartość 5, to dla żadnego całkowitego argumentu nie przyjmuje wartości 8.

3. Wielomian $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ spełnia warunki:

   - $a, b, c, d > 0$,
   - $f(x)$ jest liczbą całkowitą dla $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
   - $f(1) = 1,\ f(5) = 70$.

   Wyznacz współczynniki a, b, c, d oraz wykaż, że $f(x)$ jest liczbą całkowitą dla każdego całkowitego x.

4. Wyznacz wszystkie wartości p, dla których równanie $x^5 - px - 1 = 0$ ma dwa pierwiastki r i s będące pierwiastkami równania $x^2 - ax + b = 0$ o współczynnikach całkowitych.

5. Dany jest wielomian $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ o współczynnikach wymiernych, którego pierwiastkami są liczby rzeczywiste u i v oraz ich iloczyn uv. Udowodnij, że jeżeli $a \neq 1$, to uv jest liczbą wymierną.

6. Udowodnij, że jeżeli jeden z pierwiastków równania $ax^3 + bx + c = 0$ o współczynnikach wymiernych jest iloczynem dwóch pozostałych pierwiastków, to jest on liczbą wymierną.

7. Dany jest wielomian $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeżeli jeden z pierwiastków tego wielomianu równy jest iloczynowi dwóch pozostałych, to liczba $2 \cdot P(-1)$ jest podzielna przez liczbę $P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))$.

8. Niech p będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeżeli $p(-n) < p(n) < n$ dla pewnego całkowitego n, to $p(-n) < -n$.

9. Dane są liczby naturalne k i p oraz wielomian $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeżeli żadna z liczb $f(k), f(k+1), \ldots, f(k+p)$ nie dzieli się przez $p + 1$, to welomian $f(x)$ nie posiada pierwiastków całkowitych.

10. Wyznacz wszystkie wartości wymierne parametru a, dla których trójmian $f(x) = ax^2 + (a+1)x + a - 1$ ma wszystkie pierwiastki całkowite.

11. Dany trójmian kwadratowy $f(x)$ zamieniamy na jeden z trójmianów $x^2 f(1 + \frac{1}{x})$ lub $(x-1)^2 f(\frac{1}{x-1})$. Rozstrzygnij, czy można otrzymać w ten sposób z trójmianu $x^2 + 4x + 3$ trójmian $x^2 + 10x + 9$.

12. Znajdź wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ daną równość:
    a). $xP(x-1) = (x-2)P(x)$
    b). $(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$
    c). $P(x^2) = (P(x))^2$
    d). $P(x^3+1) = (P(x+1))^3$
    e). $1 + P(x) = \frac{P(x-1)+P(x+1)}{2}$
    f). $P(x+1) = P(x) + 2x + 1$

13. Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$P(x^2 - y^2) = P(x+y) \cdot P(x-y)\,.$$

14. Dane są takie dwa wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$, że $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że jeżeli równanie $P(x) = Q(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych to równanie $P(P(x)) = Q(Q(x))$ także nie ma pierwiastków rzeczywistych.

15. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

16. Niech $f(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeżeli $f(x)$ dzieli się przez 3 dla trzech kolejnych wartości całkowitych argumentu x, to dzieli się przez 3 dla każdej wartości całkowitej argumentu x.