Wielomiany

1. Wyznaczyć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek: dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^n - 1$ jest podzielna przez $W(n)$.

2. Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeżeli $x + y$ jest liczbą wymierną, to $W(x) + W(y)$ jest liczbą wymierną.

3. Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, przyjmującym dla pewnych dwóch różnych liczb całkowitych wartości względnie pierwsze. Dowieść, że istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych, dla których wielomian W przyjmuje wartości parami względnie pierwsze.

4. Niech c będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian

$$P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - c$$

ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Wyznaczyć, w zależności od c, sumę wartości bezwzględnych współczynników wielomianu

$$Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2)(x - x_4^2)(x - x_5^2).$$

5. Dane są wielomiany $W_1(x), W_2(x), ..., W_n(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej a wszystkie liczby

$$W_1(a), W_2(a), ..., W_n(a)$$

są złożone.

6. Dany jest wielomian $W(x) = x^2 + ax + b$ o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek: dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k + 1)$ są podzielne przez p. Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której

$$W(m) = W(m + 1) = 0.$$

7. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b, dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2 + ax + b) \cdot P(x)$ jest wielomianem postaci

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0,$$

gdzie każda z liczb $c_0, c_1, ...c_{n-1}$ jest równa 1 lub -1.

8. Dane są nieujemne liczby całkowite $k_1 < k_2 < ... < k_m$. Niech $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + ... + 2^{k_m}$. Wyznaczyć liczbę nieparzystych współczynników wielomianu $P(x) = (x + 1)^n$.

9. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

10. Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje w przedziale $\langle a, b\rangle$ (gdzie $a < b$) tylko wartości dodatnie. Udowodnić, że istnieją takie wielomiany P oraz $Q_1, Q_2, ...,$ Q_m, że

$$W(x) = (P(x))^2 + (x-a)(x-b) \sum_{i=1}^{m} (Q_i(x))^2 .$$

11. Dana jest liczba pierwsza $p \neq 5$ oraz takie liczby całkowite a, b, c, że p jest dzielnikiem obu liczb $a+b+c$ i $a^5+b^5+c^5$. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$ jest podzielna przez p.

12. Różne wielomiany P i Q o współczynnikach rzeczywistych spełniają warunek

$$P(Q(x)) = Q(P(x))$$

dla każdego x. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n wielomian

$$\underbrace{P(P(...P(P}_{n}(x))...)) - \underbrace{Q(Q(...Q(Q}_{n}(x))...))$$

jest podzielny przez wielomian $P(x) - Q(x)$.