

Parada nierówności

Marcin Fryz

15 czerwca 2012

1 Rozgrzewka

Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb a, b, c, d zachodzą:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad (1)$$

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}. \quad (2)$$

Dowód.

Pierwszą nierówność w (1) możemy podnieść równoważnie do kwadratu i zastosować wzór skróconego mnożenia:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0.$$

Co oznacza, że jest prawdziwa.

Kolejna nierówność jest łatwiejsza – zawinięcie jest natychmiastowe:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Sprawne oko dostrzeże bez problemu, że podstawiając w niej nowe zmienne $a := \frac{1}{a}$, $b := \frac{1}{b}$, otrzymamy ostatnią nierówność, wobec czego również i ona jest prawdziwa.

Nierówność (2) jest już nieco trudniejsza – wymaga pewnego spostrzeżenia i magicznej tożsamości. Najpierw jednak ustalmy nowe zmienne: $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, $x, y, z \geq 0$, dzięki czemu pierwiastek trzeciego stopnia zniknie i dostaniemy przyjemniejszą postać:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Wróćmy teraz do wspomnianych wcześniej spostrzeżeń. Zauważmy przede wszystkim, że prawdziwa jest tożsamość:

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz.$$

Ponadto zachodzi nierówność:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \right) \geq 0.$$

Korzystając z tych faktów, możemy przejść do dowodu:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Pierwszy nawias jest nieujemny, ponieważ jest sumą trzech liczb nieujemnych. Drugi nawias, jak wcześniej wykazaliśmy, również jest nieujemny. Iloczyn dwóch liczb nieujemnych też jest nieujemny, więc nasz dowód został zakończony, a tym samym nasza rozgrzewka dobiegła końca. Zapiszmy wobec tego pewne uogólnienie:

2 Nierówność między średnimi

Dla dodatnich liczb a_1, a_2, \dots, a_n zachodzą następujące nierówności:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Dowód.

Udowodnijmy najpierw nierówność Cauchy'ego-Schwarza:

Dla dowolnych nieujemnych liczb $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ zachodzi:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2. \quad (3)$$

Dowód sprowadza się do prostego zastosowania zasady indukcji zupełnej. Dla $n = 1$ mamy równość, czyli teza działa. W kroku indukcyjnym ustalmy: $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = A$, $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = B$, $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = C$, $a_{n+1} = a$, $b_{n+1} = b$. Mamy udowodnić:

$$(A + a^2)(B + b^2) \geq (C + ab)^2 \Leftrightarrow AB + Ab^2 + Ba^2 \geq C^2 + 2Cab.$$

Korzystając z założenia indukcyjnego i nierówności między średnimi dla dwóch liczb (co udowodniliśmy już wcześniej), możemy zapisać zależności: $AB \geq C^2$ oraz $Ab^2 + Ba^2 \geq 2\sqrt{ABab} \geq 2Cab$. Sumując je stronami, dostajemy tezę. Przyjmijmy teraz w (3) $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$, podzielmy stronami przez n^2 , a następnie spierwiastkujemy. Otrzymaliśmy nierówność pomiędzy średnią kwadratową i arytmetyczną.

By udowodnić nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną, podnieśmy ją stronami do potęgi n i zlogarytmujemy. Przyjmie ona postać:

$$\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n \leq n \ln \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right).$$

Jest to prawdą na mocy nierówności Jensena dla funkcji wklęsłej $f(x) = \ln x$, co kończy dowód.

Zamieńmy ponownie zmienne, a mianowicie podstawmy $a_i := \frac{1}{a_i}$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$. Po przekształceniach dostaniemy nierówność pomiędzy średnią geometryczną i harmoniczną.

Ćwiczenie. Udowodnić, że jeśli $a, b, c > 0$, to:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie.

Nierówność ta, zwana nierównością Nesbitta, jest dość popularna. Głównym tego powodem jest fakt, że dowiesć jej można nawet na dwadzieścia istotnie różnych sposobów! Przedstawię trzy z nich. Ustalmy zmienne pomocnicze: $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$. Wówczas: $a = \frac{x+z-y}{2}$, $b = \frac{x+y-z}{2}$, $c = \frac{y+z-x}{2}$ i po prostych przekształceniach dostajemy:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq 6.$$

Stosując do każdego nawiasu nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną, otrzymujemy tezę. Jest to najbardziej znany dowód. Okazuje się jednak, że w przypadku tej nierówności działa praktycznie każda metoda. Dlatego warto ją znać, bo łatwo na niej ćwiczyć. Pokażę teraz inne rozwiązania.

Zapiszmy lemat, który natychmiast zakończy dowód:

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{9}{4} \cdot \frac{a}{a+b+c} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow (2a-b-c)^2 \geq 0.$$

Możemy więc wykonać takie szacowanie:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{a}{a+b+c} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{4}\right).$$

Ale przecież:

$$\left(\frac{9}{4} \cdot \frac{a}{a+b+c} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}.$$

Więc dowód został zakończony jeszcze szybciej. Ostatni dowód wykorzystuje inny, lecz równie efektywny, lemat:

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}}.$$

Mnożąc przez mianowniki, dostajemy równoważnie:

$$2\sqrt{a^5} + 2\sqrt{a^2b^3} + 2\sqrt{a^2c^3} \geq 3\sqrt{a^3b^2} + 3\sqrt{a^3c^2}.$$

Ale z nierówności o średnich możemy zapisać:

$$\sqrt{a^5} + 2\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^5} + \sqrt{a^2b^3} + \sqrt{a^2b^3} \geq 3\sqrt{a^3b^2} \text{ i podobnie: } \sqrt{a^5} + 2\sqrt{a^2c^3} \geq 3\sqrt{a^3c^2}.$$

Sumując te nierówności stronami, dostajemy żądany lemat. Możemy wobec tego szacować:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{b^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{c^3}}{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}} = \frac{3}{2}.$$

Dowód został więc zakończony.

3 Kilka przydatnych podstawień

Założmy, że mamy udowodnić nierówność: $a + b + c \geq 3$ przy założeniu: $abc = 1$, gdzie liczby a, b, c są dodatnie. Wówczas sprawa jest dość prosta – wystarczy zapisać nierówność między średnimi: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ i korzystając z: $abc = 1$, otrzymujemy to, co chcemy. Jednak nie zawsze jest to takie proste. Jako przykład może posłużyć nierówność:

1. Udowodnić, że dla nieujemnych liczb a, b, c spełniających zależność $abc = 1$, zachodzi:

$$a + b + c + ab(1 - a) + bc(1 - b) + ca(1 - c) \leq 3.$$

Rozwiązanie.

W takich sytuacjach najczęściej szukamy podstawienia, które sprawi, że pozbedziemy się niewygodnego założenia. Łatwo się domyślić, że jeśli mamy $abc = 1$ to istnieją takie liczby dodatnie x, y, z , że $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$. By udowodnić, że takie liczby istnieją, wystarczy podać ich przykład. Łatwo widać, że $x = \frac{ab}{c^2}$, $y = \frac{bc}{a^2}$, $z = \frac{ca}{b^2}$ istotnie spełniają to założenie. Podstawmy więc nowe zmienne do naszej nierówności. Po przekształceniach dostaniemy:

$$x(x - y)(x - z) + y(y - x)(y - z) + z(z - x)(z - y) \geq 0. \quad (4)$$

Nierówność ta jest symetryczna ze względu na zmienne x, y, z , więc możemy założyć $x \geq y \geq z$. Przekształćmy ją nieco:

$$x(x - y)(x - z) + y(y - x)(y - z) + z(z - x)(z - y) = (x - y)^2(x + y - z) + z(z - x)(z - y).$$

Ponieważ odpowiednie składniki sumy po prawej stronie są nieujemne, nierówność zachodzi, a to kończy dowód. Przyjrzyjmy się teraz innym zadaniom:

2. Niech dodatnie liczby x, y, z spełniają zależność: $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Udowodnić, że wówczas:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4(x + y + z).$$

Rozwiązanie.

Możemy oczywiście wyliczyć z założenia z i otrzymać nierówność dwóch zmiennych, którą, być może, uda nam się rozwiązać. Nie będzie to jednak ani sprytne, ani wygodne. Popatrzmy na założenie – ono najbardziej odstrasza, więc warto z nim coś zrobić. Po chwili refleksji możemy zapisać je w postaci:

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} = 1.$$

Wprowadźmy zmienne: $a = \frac{x}{x+1}$, $b = \frac{y}{y+1}$, $c = \frac{z}{z+1}$. Mamy wówczas $a + b + c = 1$. Licząc x, y, z z tak otrzymanych równości, dostajemy: $x = \frac{a}{1-a}$, ale zgodnie z założeniem $a + b + c = 1$ mamy: $1 - a = b + c$, czyli $x = \frac{a}{1-a} = \frac{a}{b+c}$ i podobnie: $y = \frac{b}{a+c}$, $z = \frac{c}{a+b}$. Znaleźliśmy więc podstawienie na tak bardzo nieprzyjemnie wyglądającą równość! Wróćmy więc do nierówności, wykorzystując nasze odkrycie:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 4 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right).$$

Teza wynika z łatwych do udowodnienia nierówności:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{4a}{b+c}, \quad \frac{b}{a} + \frac{b}{c} \geq \frac{4b}{a+c}, \quad \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \geq \frac{4c}{a+b}.$$

Trudno oprzeć się wrażeniu, że te ułamki bardzo przypominają nierówność Nesbitta. Przypomnijmy ją. Mamy udowodnić, że:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Niech zatem: $\frac{a}{b+c} = x$, $\frac{b}{c+a} = y$, $\frac{c}{a+b} = z$. Z wcześniejszych rozważań wiemy, że takie liczby x, y, z spełniają równość: $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Wystarczy więc udowodnić:

$$x + y + z \geq \frac{3}{2}.$$

Przypuśćmy nie wprost, że tak nie jest, czyli $x + y + z < \frac{3}{2}$. Korzystając z nierówności $xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}$, dostajemy zależność $xy + yz + zx < \frac{3}{4}$. Ponadto z $xyz < \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ mamy $2xyz < \frac{1}{4}$. Dodając otrzymane nierówności stronami, wnioskujemy, że $xy + yz + zx + 2xyz < 1$, co stoi w sprzeczności z założeniem. Dowód został więc zakończony.

3. Niech liczby dodatnie x, y, z będą takie, że: $xy + yz + zx + xyz = 4$. Udowodnić, że:

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

Rozwiązanie.

Kolejne dziwne założenie. Jesteśmy jednak bogatsi o doświadczenia z poprzedniego zadania, więc możemy pokusić się o zapisanie założenia w innej postaci:

$$xy + yz + zx + xyz = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \cdot \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \cdot \frac{x}{2} + 2 \frac{z}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{z}{2} = 1.$$

I wobec poprzedniego zadania wnioskujemy, że istnieją takie liczby dodatnie a, b, c , które spełniają zależności: $x = \frac{2a}{b+c}$, $y = \frac{2b}{a+c}$, $z = \frac{2c}{a+b}$. Nierówność $x + y + z \geq xy + yz + zx$ jest więc równoważna nierówności:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{2ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{2ca}{(b+a)(b+c)}.$$

Po „wyczyszczeniu” mianowników otrzymujemy:

$$a(a+b)(a+c) + b(b+a)(b+c) + c(c+a)(c+b) \geq 2ab(a+b) + 2bc(b+c) + 2ca(c+a).$$

Czyli tak naprawdę: $a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0$, a to jest nierówność (4) - udowodniliśmy ją wcześniej!

4. Udowodnij, że jeśli a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi różnymi od zera, to zachodzi nierówność:

$$\left(\frac{a-b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^2 \geq 4\sqrt{\sqrt{2}-1} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right).$$

Rozwiązanie. Składniki postaci $\frac{a-b}{c}$ dość mocno rzucają się w oczy, więc możemy podejrzewać, że podstawienie $\frac{a-b}{c} = x$, $\frac{b-c}{a} = y$, $\frac{c-a}{b} = z$, doprowadzi nas do rozwiązania. Istotnie, jest to najlepsza droga do sukcesu. Po chwili zauważamy, że nowe zmienne spełniają zależność: $x + y + z = -xyz$. Udowodnić mamy nierówność:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq -4\sqrt{\sqrt{2} - 1}xyz.$$

Lewa strona nierówności jest nieujemna, więc wystarczy rozważyć sytuację, gdy $xyz < 0$. Ponadto nierówność jest symetryczna ze względu na zmienne x, y, z , więc możemy jeszcze założyć, że $x, y > 0 > z = -\frac{x+y}{1+xy}$. Ponownie podstawmy nowe zmienne: $s = x + y$, $p = xy$. Nasza nierówność sprowadza się do postaci:

$$\frac{p^2 + 2p + 2}{p(p+1)} \cdot s - \frac{2p+2}{s} \geq 4\sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Założmy, że p jest ustalone. Wówczas lewa strona nierówności jest funkcją rosnącą ze względu na zmienną s . Zauważmy jednak, że z nierówności o średnich zachodzi $s = x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{p}$. Wystarczy więc udowodnić nierówność:

$$\frac{p^2 + 2p + 3}{(p+1)\sqrt{p}} \geq 4\sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Czyli innymi słowy policzyć kres dolny funkcji zadanej równaniem: $f(t) = \frac{t^2+2t+3}{(t+1)\sqrt{t}}$. Łatwo widać, że $f'(t) = \frac{t^3+t^2-7t-3}{2\sqrt{t^3}(t+1)^2}$. Ponadto możemy założyć, że $t > 0$, bo gdyby było inaczej, to wracając do pierwotnych oznaczeń, otrzymalibyśmy sytuację: $a = b = c$, dla której nierówność staje się trywialna. Przyrównując pochodną do zera, możemy stwierdzić, że $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 7t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t+\sqrt{2}-1)(t-\sqrt{2}-1) = 0$. Założyliśmy jednak, że $t > 0$, więc wnioskujemy, że $t = 1 + \sqrt{2}$. Rysując „wężyk” widzimy, że istotnie dla $t = 1 + \sqrt{2}$ przyjmowane jest minimum i jest to minimum globalne. Pozostaje policzyć wartość funkcji dla tego argumentu. Rzeczywiście, mamy:

$$f(1 + \sqrt{2}) = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2}) + 3}{(2 + \sqrt{2})\sqrt{1 + \sqrt{2}}} = 4\sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Co kończy rozwiązanie zadania.

5. Niech a, b, c będą takimi liczbami dodatnimi, że $abc = 1$. Udowodnić, że:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c.$$

Rozwiązanie. Nierówność ta ma na celu pokazanie, że nie zawsze trzeba stosować podstawienia, by osiągnąć sukces. Pokażę w tym celu dwa różne dowody. W pierwszym z nich pomnożmy prawą stronę nierówności przez $\sqrt[3]{abc} = 1$. Do udowodnienia dostajemy:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{4}{3}}.$$

Zapisując teraz trzy nierówności między średnimi, otrzymujemy:

$$4a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 6a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{I podobnie: } 4b^2 + c^2 + a^2 \geq 6a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{1}{3}}, \quad 4c^2 + a^2 + b^2 \geq 6a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{4}{3}}.$$

Sumując te nierówności stronami i dzieląc przez 6, otrzymujemy tezę.

Inny dowód opiera się na wykorzystaniu lematu:

$$a^2 \geq a + \ln a.$$

Którego dowód pozostawiam jako proste ćwiczenie na wykorzystanie pierwszej pochodnej. Korzystając z lematu, możemy zapisać:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c + \ln a + \ln b + \ln c.$$

Ale przecież $\ln a + \ln b + \ln c = \ln abc = \ln 1 = 0$, więc logarytmy „znikają” i dowód zostaje zakończony.

4 Do domu

1. Udowodnić, że jeśli $a, b, c > 0$ oraz $ab + bc + ca + 2abc = 1$, to:

$$abc \leq \frac{1}{8} \quad \text{i} \quad ab + bc + ca \geq \frac{3}{4}.$$

2. Udowodnić, że jeśli $a, b, c > 0$, to:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{9}{2}.$$

3. Udowodnić, że jeśli $a, b, c > 0$ oraz $abc = a + b + c + 2$, to:

$$ab + bc + ca \geq 2(a + b + c) \quad \text{i} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{3}{2}\sqrt{abc}.$$

4. Udowodnić, że jeśli $a, b, c > 0$ oraz $ab + bc + ca = 2(a + b + c)$, to:

$$abc \leq a + b + c + 2.$$

5. Udowodnić, że jeśli $a, b, c > 0$, to:

$$\left(\frac{b-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{c}\right)^2 \geq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{c-a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a-b}{c}\right)^2.$$

Czy nierówność pozostanie prawdziwa, gdy stała $\frac{1}{3}$ zostanie zamieniona przez 1?