Zbiory nieskończone

Szymon Draga

20 listopada 2009r.

Niech X, Y będą zbiorami niepustymi.

Definicja 1. Obrazem zbioru $A \subseteq X$ poprzez funkcję $f\colon X \to Y$ nazywamy zbiór

$$f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}.$$

Definicja 2. Funkcję $f\colon X \to Y$ nazywamy surjekcją (odwzorowaniem na zbiór Y) jeśli

$$f(X) = Y.$$

Definicja 3. Funkcję $f\colon X \to Y$ nazywamy injekcją (różnowartościową) jeśli

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y \quad \text{dla dowolnych} \quad x, y \in X.$$

Definicja 4. Funkcję $f\colon X \to Y$ nazywamy bijekcją (odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym) jeśli jest surjekcją i injekcją.

Definicja 5. Mówimy, że zbiór A jest równoliczny ze zbiorem B (tej samej mocy co B) jeśli istnieje bijekcja $f\colon A \to B$.

Stw. (własności równoliczności)**.** :

- (zwrotność) Zbiór A jest równoliczny ze zbiorem A.
- (symetria) Jeśli zbiór A jest równoliczny ze zbiorem B, to B jest równoliczny z A.
- (przechodniość) Jeśli zbiór A jest równoliczny z B oraz B jest równoliczny z C, to A jest równoliczny z C.

Ozn. Jeśli zbiory A i B są równoliczne, to piszemy $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ lub $|A| = |B|$.

Przykład 1. Zbiory $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Z}$ są równoliczne. Przykładem bijekcji $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ jest

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}.$$

Przykład 2. Zbiory $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Q}$ są równoliczne. Istotnie, niech $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, gdzie m i n są liczbami względnie pierwszymi o rozkładach na czynniki pierwsze $m = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$ oraz $n = q_1^{n_1} \dots q_l^{n_l}$. Wówczas funkcja $g\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$,

$$g(\frac{m}{n}) = p_1^{2m_1} \dots p_k^{2m_k} q_1^{2n_1-1} \dots q_l^{2n_l-1}$$

jest bijekcją. Zdefiniujmy funkcję $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$,

$$f(q) = \begin{cases} 1 & \text{dla } q = 0 \\ 2g(q) & \text{dla } q > 0 \\ 2g(-q) + 1 & \text{dla } q < 0 \end{cases}.$$

Wówczas f jest bijekcją.

Przykład 3. Zbiory $(0,1)$ oraz $\mathbb{R}$ są równoliczne. Przykładem bijekcji $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ jest

$$f(x) = \tan \frac{2x-1}{2}\pi.$$

Definicja 6. Mówimy, że zbiór A jest niewiększej mocy niż zbiór B, jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f\colon A \to B$. Piszemy wówczas $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$.

Definicja 7. Mówimy, że zbiór A jest mniejszej mocy niż zbiór B, jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f\colon A \to B$ oraz A nie jest równoliczny z B. Piszemy wówczas $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$. Zatem

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \iff (\ \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}} \ \text{ i } \ \overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}\ )$$

Przykład 4. Zbiór $\mathbb{N}$ jest mniejszej mocy niż przedział $(0,1)$, a więc także niż $\mathbb{R}$. Istnienie funkcji różnowartościowej $f\colon \mathbb{N} \to (0,1)$ jest oczywiste. Weźmy np. $f(n) = \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Mniej trywialne jest pokazanie, że zbiory te nie są równoliczne. Pokażemy to stosując tzw. rozumowanie przekątniowe podane przez Cantora. W celu dowodu nie wprost przypuśćmy, że zbiory te są równoliczne, czyli że wszystkie liczby z przedziału $(0,1)$ można ustawić w (różnowartościowy) ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Niech $a_n = 0,d_{n1}d_{n2}d_{n3}\ldots$ będzie rozwinięciem dziesiętnym liczby a_n zawierającym nieskończenie wiele cyfr różnych od zera (np. $0,12 = 0,11(9)$).

$$\begin{array}{ccl}
a_1 & = & 0,\mathbf{d_{11}}d_{12}d_{13}\ldots \\
a_2 & = & 0,d_{21}\mathbf{d_{22}}d_{23}\ldots \\
a_3 & = & 0,d_{31}d_{32}\mathbf{d_{33}}\ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
c & = & 0,\mathbf{d'_{11}}\mathbf{d'_{22}}\mathbf{d'_{33}}\ldots
\end{array}$$

Przyjmijmy:

$$d'_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ gdy } d_{ij} \neq 1 \\ 2 \text{ gdy } d_{ij} = 1 \end{cases}$$

Niech $c = 0,d'_{11}d'_{22}d'_{33}\ldots$. Wówczas liczba c posiada nieskończenie wiele cyfr różnych od zera w swoim rozwinięciu dziesiętnym oraz należy do przedziału $(0,1)$. Z drugiej strony liczba c nie występuje w ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bo jej rozwinięcie dziesiętne różni się od a_n n-tym miejscem po przecinku. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że

$$\overline{\overline{\mathbb{N}}} < \overline{\overline{(0,1)}}.$$

Definicja 8. Zbiór nazywamy nieskończonym, jeśli jest on równoliczny z pewnym swoim podzbiorem właściwym.

Przykład 5. Zbiory $\mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{R}$ są nieskończone, bo są równoliczne ze swoimi podzbiorami właściwymi (odpowiednio z $\mathbb{N}$ oraz $(0,1)$).

Uwaga. Wprowadzona w definicji 6 *nierówność między mocami zbiorów* ma własności *zwykłej* nierówności między liczbami tzn. zwrotność, antysymetrię oraz przechodniość. O ile zwrotność i przechodniość łatwo pokazać, o tyle o antysymetrii tzn.

$$(\ \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}} \ \text{ i } \ \overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}\ ) \Longrightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$$

mówi tzw. twierdzenie Cantora-Bernsteina, którego dowód jest bardzo trudny i długi.