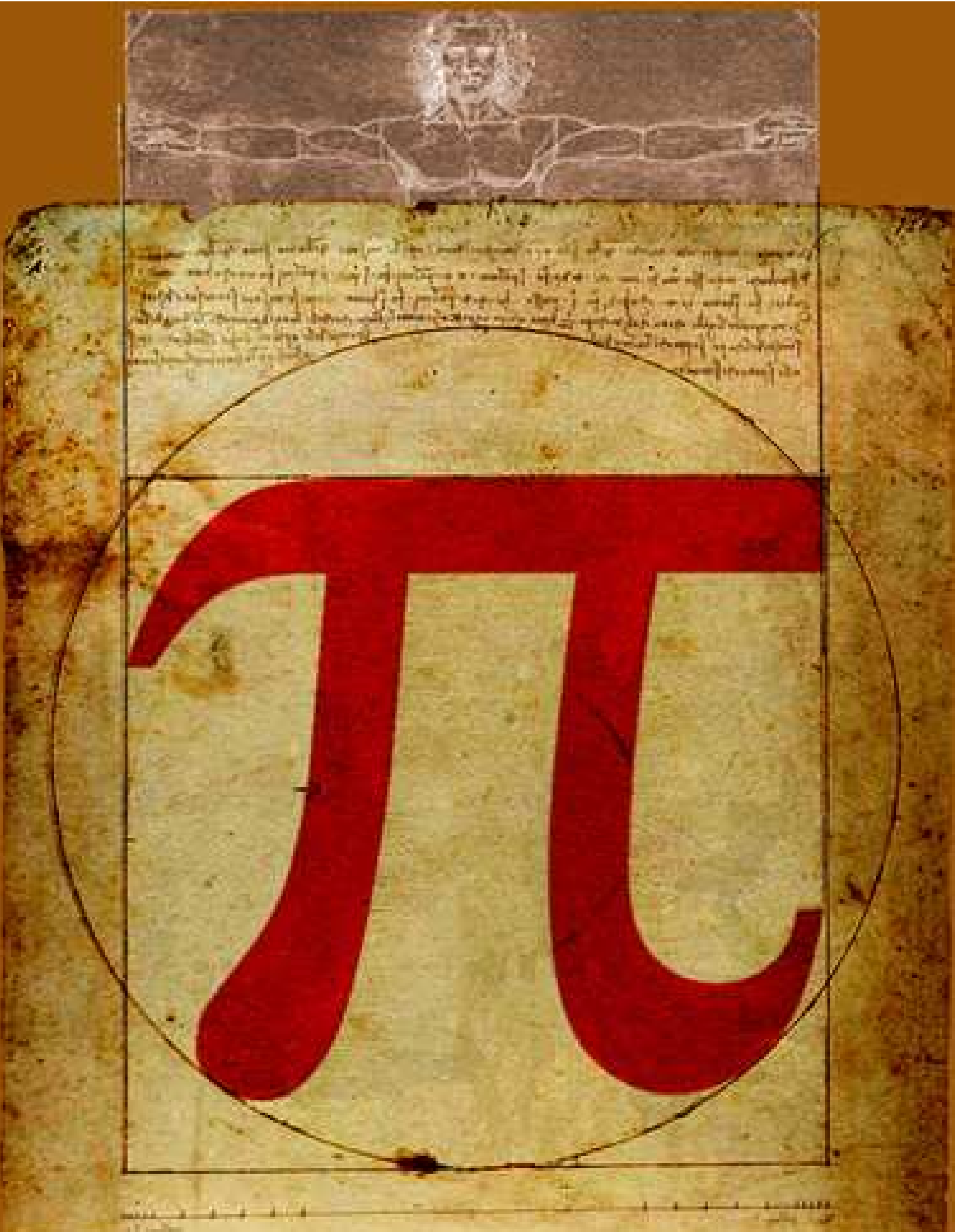


[π-MACIERZATOR]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

[πografie – Jules Henri Poincaré]

1854–1912

Nauka jest budowana z faktów, tak jak dom z kamieni. Ale zbiór faktów to nie nauka, tak jak sterta kamieni nie jest domem.

Gdyby poprosić przeciętnego zjadacza chleba o wymienienie jednego nazwiska matematyka żyjącego współcześnie, to zapewne w 95% przypadków otrzymalibyśmy odpowiedź „Nie wiem", a w pozostałych 5% „Był ostatnio ten Rosjanin, który nie przyjął miliona dolarów za coś tam" (zapewne okraszone komentarzami o jego dziwactwie i kilkoma wyssanymi z palca anegdotami o innych przejawach jego ekscentryzmu). Powstaje pytanie, czym jest to „coś tam" (oraz kim jest ten Rosjanin, ale to zagadnienie pozostawimy samodzielnym badaniom szanownych Czytelników).

W 2000 roku Clay Mathematics Institute ogłosił listę siedmiu tzw. problemów milenijnych, za rozwiązanie każdego z nich oferując nagrodę w wysokości miliona dolarów. Obok hipotezy Riemanna, problemu $P = NP$ czy równań Naviera-Stokesa[1] pojawiła się tam tzw. hipoteza Poincarégo. Jest to także jedyny problem z tej listy już rozwiązany[2] właśnie przez Grigorija Perelmana, wspomnianego już Rosjanina. Kim zatem był Poincaré? Każdy z nas czuje, nawet jeśli nigdy wcześniej tego nazwiska nie słyszał, że musiał to być nie byle kto, żeby sformułować problem, który po stu latach dostaje się na swoistą listę „problemów tysiąclecia".

J.H.Poincaré

Bycie wielkim prawdopodobnie było własnością dziedziczną w rodzie Poincaré, gdyż jeden z kuzynów młodego matematyka miał w przyszłości zostać premierem Francji, a drugi wyosoko postawioną personą na uniwersytecie. Można więc rzec, że osiągnięcie wielkości było przeznaczeniem małego Julesa. Dyfteryt, na który zachorował Jules w wieku 5 lat, mógł jednak przekreślić wszelkie szanse na normalne życie – przez 9 miesięcy chłopak walczył z paraliżem nóg i gardła, uniemożliwiającym chodzenie i mówienie. Prawdopodobnie stąd wzięła się późniejsza antypatia matematyka do sportów oraz jego skłonność do milczenia i układania całych prac w myśli, przed rozpoczęciem przelewania ich na papier. Miał też skłonność do głębokich zamyśleń i był niezwykle roztargniony – raz, idąc za matką i siostrą, wpadł do rzeki, gdyż nie zauważył, że jego towarzyszki skręciły na most. Słowem, już jako dziecko

[1] Kolejność wymienienia problemów jest oczywiście przypadkowa.

[2] W 2010 roku pojawiła się propozycja rozwiązania problemu $P = NP$, ale znaleziono już w niej kilka błędów, choć autor twierdzi, że jest w stanie je wszystkie poprawić.

zdradzał symptomy genialnego profesora. W wieku ośmiu lat rozpoczął naukę w miejscowym liceum, będąc najlepszym uczniem w praktycznie każdej dziedzinie. Jego nauczyciel matematyki nazywał go nawet „matematycznym potworem" (w sensie pozytywnym).

Jules zdobywał pierwsze miejsca w concours général, ogólnofrancuskich konkursach dla licealistów, a w trakcie egzaminu do École Normale miał miejsce charakterystyczny incydent. Mianowicie należało wyznaczyć linię przecięcia stożka i hiperboloidy obrotowej. Fatalnie rysujący Jules uciekł się do matematyki i wyznaczył dokładny wzór tej linii, jednak narysował ją odwrotnie niż należało – ostatecznie zajął piąte miejsce na liście kandydatów. Zdając egzamin na École Polytechnique Jules ponownie napotkał przeszkodę w postaci egzaminu z rysunku. Akwarelę namalował tak koszmarnie, że egzaminator oblał go bez wahania, jednak później komisja miłosiernie zaliczyła mu rysunek na najniższą możliwą ocenę, co – w zestawieniu z wynikami pozostałych egzaminów – pozwoliło Julesowi zająć... pierwsze miejsce. Mając wybór pomiędzy dwiema tak wspaniałymi uczelniami, młody Poincaré wybrał w końcu Polytechnique.

Poincaré pracował tak, jak pracę geniusza wyobrażają sobie holywoodzcy scenarzyści. W każdym amerykańskim filmie widzimy, że geniusz zajmuje się swoim życiem i przedstawione mu problemy rozwiązuje zupełnie przypadkiem, przez chwilowy rozbłysk geniuszu i skojarzenie przypadkowego zdarzenia z daną zagadką. Każdy geniusz obruszy się, oczywiście, na takie spłycenie jego pracy... Acz u Poincarégo tak to mniej więcej wyglądało. Raz Poincaré zajmował się pewnymi klasami funkcji, dla których nie istniały rozwiązania pewnych równań różniczkowych. Gdy wsiadał do autobusu, zupełnie „z powietrza" wpadła mu do głowy myśl, że zastosowanie przez niego funkcje pokrywają się z tymi stosowanymi w geometrii nieeuklidesowej. Oczywiście, myśl ta była prawdziwa.

Jules miał bardzo rygorystyczny plan dnia, w którym cztery godziny (w dwóch blokach dwugodzinnych) poświęcał na pracę badawczą – przez resztę dnia spacerował (nieraz kilkanaście kilometrów) i czytał prace matematyczne. Miał też zasadę, że nigdy nie myślał o żadnym problemie przed snem, by nie mieć kłopotów z zaśnięciem. W swych pracach z równań różniczkowych Jules szedł nie w kierunku efektywnych sposobów znajdowania rozwiązań, ale chciał oceniać własności rozwiązań, o których wiemy, że istnieją, ale niekoniecznie potrafimy je wyznaczyć. Jak sam mówił, matematyka nie interesuje kształt danego tworu, ale własności, jakie ten twór posiada i relacje, jakie ma z innymi podobnymi sobie tworami; podobnie pojęcie „poprawności" geometrii nie ma sensu, bo geometria przyjmowana w fizyce i podobnych naukach zawsze będzie tą, której po prostu używać najwygodniej, a nie tą, która jest „poprawna" (bo o takiej mówić się nie da).

J.H.Poincaré

Tylko wzajemne własności tworów są istotne, a nie ich kształt... Brzmi jak topologia? Bo nią jest. Poincaré był określany po swojej śmierci twórcą topologii i jest to w sumie niewielka przesada. Rozwijał on dziedzinę, którą dziś nazywamy topologią algebraiczną. Ogólnie o topologii mówi się, że jest to geometria gumy do żucia lub, półżartem, że dla matematyka zajmującego się topologią pączek i kubek do kawy to jedno i to samo. Bierze się to właśnie stąd, że w topologii pojęcia takie jak kąt, długość czy objętość nie mają znaczenia – chodzi o własności tworów, które są zachowywane pomimo ich „rozciągania" (jak gumy do żucia), ale bez rozrywania lub sklejania w którymkolwiek miejscu. Poincaré badał takie własności tworów, które „lokalnie" przypominały zwykłą przestrzeń n-wymiarową i wysunął hipotezę, że – w dużym uproszczeniu – jeżeli coś wszędzie przypomina sferę w przestrzeni trójwymiarowej, to już musi być możliwe przekształcenie tego czegoś przez takie „rozciąganie" jak powyżej właśnie w taką sfer. Co ciekawe, problem ten był rozwiązany dla sfer jedno i dwuwymiarowych, a w XX wieku został rozwiązany dla wymiarów większych lub równych cztery... Ale przypadek trójwymiarowy doczekał się dowodu Perelmana dopiero niedawno.

Poza innymi, niezwykłymi pracami z matematyki, dotyczącymi matematyki nieba, czasem podkopującymi ugruntowane już metody astronomii, bardzo ważnym wkładem Poincarégo w rozwój nauki jako takiej był wykład, jaki wygłosił na posiedzeniu Towarzystwa Psychologicznego w Paryżu w 1908r. W czasie tego wykładu był jednocześnie badaczem i badanym – przedmiotem wykładu było bowiem funkcjonowanie umysłu matematycznego podczas rozwiązywania problemu. Dając nam ten wgląd w proces myślenia matematycznego, Poincaré na pewno zwiększył wiedzę każdego z nas na temat zagadnienia „Dlaczego mi to zadanie nie chce wyjść, a Ty wymyśliłeś rozwiązanie w trzy minuty?".

Jules zawsze był przeciwnikiem czystego formalizmu matematycznego i suchej logiki, twierdząc, że tylko przez połączenie jej z „intuicją" możemy iść naprzód, bez niej tylko kręcąc się w kółko w pętli tautologii. Twierdził, że pełna aksjomatyzacja całej matematyki nie jest możliwa – czego wiele lat później dowiódł Goedel. Zmarł nagle w wieku 58 lat. Na jego pogrzebie mówca nazwał go „poetą nieskończoności i bardem nauki". I kimś takim właśnie był.

Niewinny Rosomak

[Impresje olimpijskie]

Pewne wzmocnienie nierówności Erdősa-Mordella

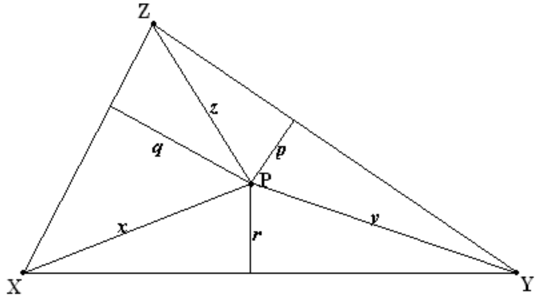
W dotychczasowej, ponad pięćdziesięcioletniej historii Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej najtrudniejszym problemem okazała się pewna geometryczna nierówność, którą zaproponowano jako zadanie nr 5 podczas 37. edycji tych prestiżowych zawodów, rozgrywanej w Bombaju. Tylko sześć osób, spośród wszystkich 426 uczestników, otrzymało maksymalną notę 7 punktów za dowód wspomnianej nierówności. Jej treść jest następująca.

Zadanie. *Niech $ABCDEF$ będzie takim sześciokątem wypukłym, że AB jest równoległe do ED, BC jest równoległe do FE i CD jest równoległe do AF. Niech R_A, R_C, R_E będą odpowiednio promieniami okręgów opisanych na trójkątach FAB, BCD, DEF, zaś p niech będzie obwodem tego sześciokąta. Dowieść, że $R_A + R_C + R_E \geq p/2$.*

Nie całkiem natychmiastowa jest obserwacja, że teza tego zadania jest w istocie wzmocnieniem klasycznej nierówności Erdősa–Mordella. Zauważenie tego faktu mogłoby istotnie pomóc uczestnikowi olimpiady w znalezieniu rozwiązania, pod warunkiem, że znałby on oryginalny dowód wspomnianej nierówności.

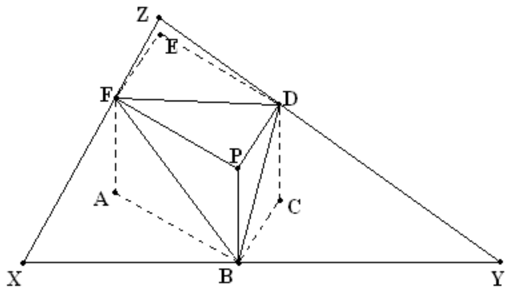
Nierówność Erdősa–Mordella. *Niech P będzie punktem leżącym we wnętrzu trójkąta XYZ, niech x, y, z będą odległościami punktu P odpowiednio od wierzchołków X, Y, Z i niech p, q, r będą odległościami punktu P odpowiednio od boków YZ, ZX, XY. Wówczas*

$$x + y + z \geq 2(p + q + r) \tag{1}$$



Aby zobaczyć, w jaki sposób powyższe twierdzenie wynika z tezy zadania, rozważmy dowolny trójkąt XYZ oraz punkt P leżący w jego wnętrzu.

Sześciokąt wypukły, który pojawia się w wypowiedzi zadania, konstruujemy następująco: w roli punktów B, D, F bierzemy rzuty prostopadłe punktu P odpowiednio na proste XY, YZ, ZX, natomiast w roli punktów A, C, E bierzemy te, które uzupełniają do równoległoboków odpowiednio trójkąty PFB, PBD, PDF.



Jest jasne, że przeciwległe boki tak otrzymanego sześciokąta $ABCDEF$ są równoległe. Jego obwód wynosi

$$p = 2(|PB| + |PD| + |PF|).$$

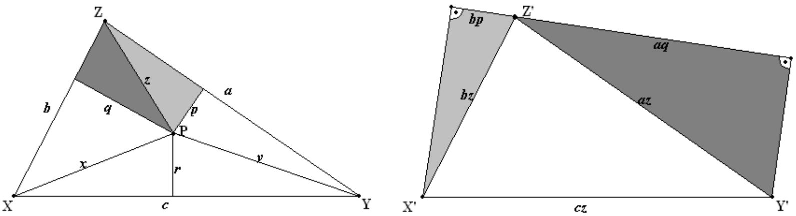
Ponadto, ponieważ kąty $\sphericalangle XFP$ oraz $\sphericalangle XBP$ są proste, odcinek XP jest średnicą okręgu przechodzącego przez punkty X, B, P, F, a zatem – okręgu opisanego na trójkącie BPF. Skoro jednak trójkąty BPF i FAB są przystające, długość odcinka XP jest też długością średnicy okręgu opisanego na trójkącie FAB, czyli – używając oznaczeń z treści zadania – mamy $|XP| = 2R_A$. Analogicznie otrzymalibyśmy równości $|YP| = 2R_C$ oraz $|ZP| = 2R_E$. Na mocy tezy zadania, suma długości tych trzech średnic jest niemniejsza od obwodu p naszego sześciokąta, co tłumaczy się na nierówność

$$|XP| + |YP| + |ZP| \geq 2(|PB| + |PD| + |PF|),$$

a to jest nic innego jak nierówność Erdősa–Mordella.

Jeżeli uświadomimy sobie teraz, że zastosowaliśmy tezę zadania do sześciokąta, którego przeciwległe boki są nie tylko równoległe, ale mają też równe długości, powinniśmy się zgodzić ze stwierdzeniem, że zaproponowane zadanie stanowi istotne wzmocnienie nierówności Erdősa–Mordella. Obserwacja ta daje pewne wyczucie na temat stopnia trudności zadania oraz może tłumaczyć małą liczbę najwyżej ocenionych rozwiązań. Odpowiedzieć sobie należy oczywiście na pytanie, na ile trudna w dowodzeniu jest sama nierówność Erdősa–Mordella. Sięgnijmy więc nieco do jej historii.

Nierówność pojawiła się w 1935 roku, jako zadanie zaproponowane przez Paula Erdősa, w sekcji „Advanced Problems” czasopisma *American Mathematical Monthly*. Jeszcze w tym samym roku, niezależnie od siebie, Louis Mordell i David Barrow (trudno powiedzieć, dlaczego przyjęta powszechnie nazwa nierówności nie uwzględnia jego nazwiska) udowodnili postawioną hipotezę. Ich dowody, które opublikowano w 1937 roku, mocno czerpią z trygonometrii i zapewne dla wszystkich zainteresowanych od razu było jasne, że nie są one najbardziej eleganckie ze wszystkich możliwych do odkrycia. Do dzisiaj ukazało się wiele innych dowodów; pięć z nich można znaleźć w książce Lva Kourliandtchika [2]. Dalsze referencje znajdują się we wstępie pracy Claudi Alsiny i Rogera B. Nelsena [1], w której autorzy zaproponowali dowód uderzająco prosty i rzeczywiście – jak zaznaczają oni w tytule – wizualny w pełnym tego słowa znaczeniu. Ich pomysł polegał na przeskalowaniu i poprzestawianiu fragmentów trójkąta, tak jak jest to pokazane na poniższym rysunku.



W otrzymanym trapezie prostokątnym (uzasadnienie faktu, że „posklejanie” takiego trapezu jest możliwe pozostawiamy Czytelnikowi) zachodzi oczywista nierówność $aq + bp \le cz$. Analogicznie otrzymalibyśmy dwie dalsze nierówności: $ar + cp \le by$ i $br + cq \le ax$. Mamy więc

$$x \ge \frac{b}{a}r + \frac{c}{a}q, \quad y \ge \frac{a}{b}r + \frac{c}{b}p, \quad z \ge \frac{a}{c}q + \frac{b}{c}p$$

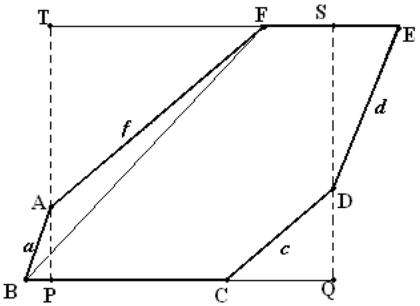
i dodając te nierówności stronami, otrzymujemy

$$x + y + z \ge \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)p + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)q + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)r \ge 2(p + q + r),$$

co dowodzi (1). W ostatnim kroku wykorzystaliśmy oczywistą nierówność $x + x^{-1} \ge 2$, prawdziwą dla $x > 0$.

Przejdźmy teraz do rozwiązania naszego zadania. Będzie ono w istocie pewną modyfikacją jednego z możliwych dowodów nierówności Erdősa–Mordella, a dokładniej – pierwszego z jej dowodów zaprezentowanych w książce [2]. Tak mógłby rozumować potencjalny uczestnik olimpiady, który znał wcześniej ten dowód i zauważył, że postawione zadanie jest uogólnieniem tej klasycznej nierówności.

Przede wszystkim oznaczmy długości kolejnych boków danego sześciokąta przez a, b, c, d, e, f, jak na rysunku. Kąty wewnętrzne sześciokąta oznaczać będziemy tą samą literą, która oznacza wierzchołek danego kąta.



Pierwszy odruch, który ma na celu wprowadzenie do gry występujących w tezie promieni R_A, R_C i R_E, jest dosyć naturalny. Korzystając mianowicie z twierdzenia sinusów, możemy zapisać następujące równości:

$$2R_A \sin\sphericalangle A = |FB|, \quad 2R_C \sin\sphericalangle C = |BD|, \quad 2R_E \sin\sphericalangle E = |DF|.$$

Kiedy porównamy to z tezą zadania, prawdopodobnie poczujemy nieodpartą potrzebę oszacowania długości $|FB|$, $|BD|$ i $|DF|$ z dołu przez pewne wyrażenia, mające co nieco wspólnego z obwodem p naszego sześciokąta. Skupmy się chwilowo na jakiejś sensownej próbie oszacowania z dołu $|FB|$.

Kierując się żelazną zasada dowodzenia wszelkich nierówności: *zanim pokażesz nierówność, zobacz kiedy zachodzi równość*, możemy pomyśleć przez chwilę o przypadku sześciokąta foremnego. Nie trzeba być wybitnym geometrą, aby odgadnąć, że w takim właśnie przypadku teza zadania zachodzi z równością (choć to, czy jest to jedyny taki przypadek, nie jest w tej chwili bynajmniej oczywiste). A co wtedy dzieje się z naszym odcinkiem FB? Pierwsze, co rzuca się w oczy, to fakt, że jest on prostopadły do obydwu prostych BC i EF. Brzmienie słów „prostopadły" i „nierówność" uruchamia następującą myśl: za naszą nierówność odpowiada zapewne fakt mówiący, że najkrótszym odcinkiem łączącym dwie proste równoległe jest odcinek do nich prostopadły, a nasza nierówność zachodzi tak „ostro", jak bardzo odcinek FB nie jest prostopadły do równoległych prostych BC i EF.

Próbując odwrócić proces przekrzywiania sześciokąta foremnego, dla którego zachodzi równość, rozważamy rzuty prostopadłe P i T punktu A odpowiednio na proste BC i EF. Mamy

$$|FB| \geq |PT| = |AP| + |AT| = a \sin\sphericalangle E + f \sin\sphericalangle C,$$

przy czym wykorzystaliśmy tu równość naprzeciwległych kątów naszego sześciokąta. Jako zwolennicy symetrii, nie zrezygnowalibyśmy pewnie z dokonania tej samej operacji „z drugiej strony”, rozważając rzuty prostopadłe Q i S punktu D odpowiednio na proste BC i EF. Otrzymalibyśmy

$$|FB| \geq |QS| = |DQ| + |DS| = c \sin \sphericalangle C + d \sin \sphericalangle E$$

i w konsekwencji

$$2|FB| \geq (c + f) \sin \sphericalangle C + (a + d) \sin \sphericalangle E.$$

Przypominając sobie teraz, po co właściwie zajmowaliśmy się odcinkiem FB, możemy napisać nierówność

$$4R_A \geq (c + f) \frac{\sin \sphericalangle C}{\sin \sphericalangle A} + (a + d) \frac{\sin \sphericalangle E}{\sin \sphericalangle A},$$

a po chwili spokojnej refleksji stwierdzić też, że cała reszta to już tylko praca fizyczna. Wystarczy bowiem napisać analogony uzyskanego przed chwilą oszacowania dla promieni R_C i R_E, a następnie dodać wszystkie trzy nierówności stronami, aby uzyskać

$$\begin{aligned} 4(R_A + R_C + R_E) \geq (a + d) &\left(\frac{\sin \sphericalangle E}{\sin \sphericalangle A} + \frac{\sin \sphericalangle A}{\sin \sphericalangle E} \right) + \\ &+ (b + e) \left(\frac{\sin \sphericalangle C}{\sin \sphericalangle E} + \frac{\sin \sphericalangle E}{\sin \sphericalangle C} \right) + (c + f) \left(\frac{\sin \sphericalangle A}{\sin \sphericalangle C} + \frac{\sin \sphericalangle C}{\sin \sphericalangle A} \right) \geq \\ &\geq 2(a + d) + 2(b + e) + 2(c + f) = 2p. \end{aligned}$$

Na zakończenie wypada zauważyć, że analiza powyższego dowodu pokazuje, że równość w nierówności z zadania zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy rozważany sześciokąt jest sześciokątem foremnym. Podobnie, analiza dowodu Alsiny i Nelsena nierówności Erdősa–Mordella przekonuje, że nierówność ta staje się równością tylko w przypadku trójkąta równobocznego. Pozostawiamy Czytelnikowi precyzyjne uzasadnienie tych dwóch nietrudnych obserwacji.

Bibliografia

[1] C. Alsina, R.G. Nelsen, *A visual proof of the Erdős–Mordell inequality*, Forum Geometricorum **7** (2007), 99–102.

[2] L. Kourliandtchik, *Słynne Nierówności*, Wyd. Aksjomat, Toruń 2002.

Tomasz Kochanek

Doktor Tomasz Kochanek jest wykładowcą Instytutu Matematyki UŚ i jednocześnie opiekunem Koła Naukowego Matematyków Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach.

[Twierdzenie Midy'go]

Liczba π jest słynna głównie ze swojego rozwinięcia dziesiętnego, jednak okazuje się, że nawet rozwinięcia dziesiętne niektórych liczb wymiernych skrywają wiele ciekawostek. O jednej z nich będzie poniższy artykuł.

Spójrzmy na rozwinięcie dziesiętne liczby $\frac{1}{17} = 0.(0588235294117647)$ (ułamek ten ma okresowe rozwinięcie dziesiętne). Zauważmy, że okres[3] tego ułamka ma długość 16 (jest to liczba parzysta). Podzielmy teraz okres tej liczby na dwie równe części i je do siebie dodajmy, otrzymamy wówczas:

$$05882352 + 94117647 = 99999999 = 10^8 - 1.$$

Okazuje się, że prawdziwe jest następujące twierdzenie udowodnione przez francuskiego matematyka E. Midy'ego w 1836 roku:

Niech x będzie liczbą naturalną, p liczbą pierwsza, $x < p$ i załóżmy, że liczba $\frac{x}{p} = 0.(a_1 a_2 a_3 \ldots a_{2k})$ ma rozwinięcie dziesiętne o okresie parzystej długości $2k$. Wtedy dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ prawdziwa jest równość:

$$a_i + a_{i+k} = 9.$$

Co jest równoważne $a_1 \ldots a_k + a_{k+1} \ldots a_{2k} = 10^k - 1$ ([4]).

Zanim udowodnimy to twierdzenie, zauważmy następującą rzecz:

Jeżeli liczba $\frac{a}{b}$ (gdzie liczby a i b są względnie pierwsze) ma rozwinięcie dziesiętne okresowe o okresie l, to l jest najmniejszą taką liczbą, że $10^l - 1$ jest podzielne przez b.

Istotnie, jeśli podczas zamieniania liczby $\frac{a}{b}$ na ułamek dziesiętny (czyli podczas dzielenia pisemnego) w pewnym kroku (powiedzmy w k-tym) otrzymamy resztę a, to l kroków później również otrzymamy resztę a (bo l jest okresem).

W każdym kroku „dopisujemy" zero, więc liczba $a \cdot 10^l - a = a(10^l - 1)$ jest podzielna przez b (bo w $k + l + 1$ kroku dzielimy liczbę $a \cdot 10^l$ przez b i otrzymujemy taką samą resztę jak w $k + 1$ kroku przy dzieleniu liczby a przez b). Z założenia, że liczby a i b są względnie pierwsze wynika, że $10^l - 1$

[3] *Okres* jest tutaj rozumiany jako najmniejsza możliwa długość powtarzającej się nieskończenie wiele razy sekwencji cyfr., czyli np. okresem liczby $\frac{1}{11} = 0.09090909\ldots = 0.(09)$ jest 2 a nie np. 4.

[4] Tutaj umawiamy się, że np. liczbę 000123 będziemy rozumieć jako 123.

jest podzielne przez b. Ponadto l jest najmniejszą liczbą, taką, że $10^l - 1$ jest podzielne przez b, bo l jest okresem (czyli jest najmniejszą taką liczbą, że jeśli w k kroku otrzymamy resztę a to $k + l$ też).

Przejdźmy do dowodu twierdzenia.

Niech $\frac{x}{p} = 0.(a_1a_2a_3\dots a_{2k})$ będzie taka jak w twierdzeniu i niech $N = a_1a_2\dots a_{2k}$. Wtedy (podobne rozumowanie przeprowadzamy podczas zamiany liczby o okresowym rozwinięciu dziesiętnym na ułamek zwykły):

$$\begin{aligned}
\tfrac{x}{p} &= 0.(a_1a_2a_3\dots a_{2k}),\\
\tfrac{x}{p}\cdot 10^{2k} &= a_1a_2a_3\dots a_{2k}.(a_1a_2a_3\dots a_{2k}) = N + 0.(a_1a_2a_3\dots a_{2k}) = N + \tfrac{x}{p},\\
\tfrac{x}{p} &= \tfrac{N}{10^{2k}-1}.
\end{aligned}$$

Z udowodnionego wcześniej lematu mamy, że liczba $10^{2k} - 1$ jest podzielna przez p oraz, że liczba $10^l - 1$ nie jest podzielna przez p dla wszystkich liczb naturalnych $l < 2k$. Zauważmy, że $10^{2k} - 1 = (10^k + 1)(10^k - 1)$. Skoro $10^{2k} - 1$ jest podzielne przez p oraz $10^k - 1$ jest niepodzielne przez p, to $10^k + 1$ musi być podzielne przez liczbę p. Stąd wynika, że liczba

$$\frac{(10^k+1)x}{p} = \frac{N}{10^k - 1}$$

jest liczbą naturalną, czyli możemy napisać, że

$$N \equiv 0 \pmod{10^k - 1}.$$

Niech liczby N_0 oraz N_1 będą liczbami utworzonymi odpowiednio z cyfr $a_1, \dots a_k$ oraz $a_{k+1}, \dots a_{2k}$, tzn. $N_0 = a_1 \dots a_k$ i $N_1 = a_{k+1} \dots a_{2k}$. Wtedy $N = 10^k N_0 + N_1$, a stąd:

$$N_0 + N_1 \equiv 0 \pmod{10^k - 1}$$

Zauważmy, że $0 \le N_0 \le 10^k - 1$ oraz $0 \le N_1 \le 10^k - 1$. Ponadto zauważmy, że obie liczby N_0 i N_1 nie mogą równocześnie być równe 0 lub $10^k - 1$ (bo $\frac{x}{p} \in (0, 1)$). Stąd otrzymujemy

$$0 < N_0 + N_1 < 2(10^k - 1),$$

więc (pamiętając, że $N_0 + N_1 \equiv 0 \pmod{10^k - 1}$):

$$N_0 + N_1 = 10^k - 1,$$

co kończy dowód.

Twierdzenie Midy'ego można sformułować trochę ogólniej. *Niech x, y będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, $x < y$, y jest względnie pierwsze z 10 oraz niech liczba wymierna $\frac{x}{y} = 0.(a_1 \ldots a_{2k})$ ma rozwinięcie dziesiętne o okresie parzystej długości $2k$. Jeżeli zachodzi jeden z warunków:*

(i) y jest liczbą pierwszą,

(ii) y jest pewną potęgą liczby pierwszej,

(iii) y jest względnie pierwsze z $10^k - 1$,

to dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ zachodzi równość:

$$a_i + a_{i+k} = 9.$$

vil

[Najważniejszy zbiór w matematyce]

Czy zastanawialiście się kiedyś jaki jest najważniejszy zbiór w matematyce? Jeśli tak, to pewnie znacie odpowiedź na to pytanie, a jeśli nie, to jak ona by brzmiała? Większość z nas spotyka się w życiu codziennym (albo tylko na lekcjach matematyki lub wykładach) z takimi zbiorami jak zbiór liczb naturalnych, wymiernych czy rzeczywistych, więc pewnie któryś z nich uznałaby za ten najważniejszy. A jak jest naprawdę – który z nich zasługuje na to miano? Otóż żaden – najważniejszy jest... zbiór pusty!

Aby złagodzić ewentualne oburzenie niektórych Czytelników, postaram się uzasadnić moją tezę. Na początek zastanówmy się jakie zbiory w ogóle istnieją. Odpowiedź na to pozornie głupie pytanie wcale nie jest taka prosta. Słyszeliśmy o różnych zbiorach, ale czy mają prawo bytu... Skoro się o nich mówi, to pewnie tak. I rzeczywiście tak jest, ale po kolei.

Otóż należy sobie zdać sprawę z tego, iż (prawie) cała współczesna matematyka jest oparta o teorię mnogości, czyli zbiorów. Zaś jeden z aksjomatów tej teorii, aksjomat zbioru pustego, mówi, że istnieje zbiór, do którego nie należy żaden element. Zbiór ten nazywamy zbiorem pustym. Potężna siła tego aksjomatu jest widoczna dopiero wtedy, gdy dowiemy się, że bez niego nie można udowodnić istnienia czegokolwiek (w matematyce). Owszem, istnieją inne aksjomatyki, gdzie ów aksjomat jest zastąpiony przez inny, mówiący, że istnieje co najmniej jeden zbiór. Wówczas mając ten zbiór, powiedzmy A, można wykazać, że istnieje zbiór $A \setminus A$, czyli zbiór pusty. Również w tym przypadku jedynym *konkretnym* zbiorem jest zbiór pusty. Mam nadzieję, że ta argumentacja choć częściowo przekonała Czytelników do słuszności mojej tezy.

Ten jakże szczególny twór oznaczamy literą $\varnothing$, która pochodzi z alfabetu norweskiego i nie ma nic wspólnego z grecką literą Φ. Postaram się omówić kilka ciekawych, nieintuicyjnych jego własności. Większość przeprowadzonych rozumowań opiera się na prawdziwości implikacji $x \in \varnothing \Rightarrow \Phi(x)$, gdzie Φ jest dowolną formułą zdaniową.

Klasycznym przykładem takiego rozumowania może być fałszywość zdania: *Jeśli w miejscowości X każdy szewc nosi brodę, to tym bardziej jakiś szewc nosi brodę.* Zdanie to nie jest prawdziwe, gdyż w danej miejscowości może nie być ani jednego szewca. Zatem implikacja $\underset{x}{\forall}\Phi(x) \Rightarrow \underset{x}{\exists}\Phi(x)$ jest na ogół fałszywa!

Innym równie zaskakującym spostrzeżeniem może być to, że każdy podzbiór $\mathbb{N}$, do którego należy liczba niewymierna, jest (jednocześnie!) nieskończony, pusty i równy $\{\pi\}$. Kontynuując to rozumowanie możemy stwierdzić, że każdy zbiór nieskończony, który ma dokładnie 23 elementy jest równy $\mathbb{N}$. Ale czy stąd wynika, że zbiór $\mathbb{N}$ ma dokładnie 23 elementy? Nie, gdyż rodzina zbiorów nieskończonych o dokładnie 23 elementach jest pusta!

Teraz już trochę poważniej. Przyjrzyjmy się funkcji $f\colon \varnothing \to X$, gdzie X jest pewnym zbiorem. Co można na jej temat powiedzieć? Okazuje się, że tak dużo, iż z pewnością nie zmieściłoby się to w całym Macierzatorze. Ograniczymy się tylko do omówienia kilku jej własności. Po pierwsze, jej wykres jest zbiorem pustym, ale to chyba oczywiste. Dalej, funkcja f jest różnowartościowa; wynika to z prawdziwości implikacji $x, y \in \varnothing \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Jednak implikacja $x, y \in \varnothing \Rightarrow f(x) = f(y)$ także jest prawdziwa, co oznacza, że f jest stała. A czy jest *na*? Rozważmy dwa przypadki:

1. $X = \varnothing$: Wówczas dla każdego $x \in X$... wszystko jest prawdą. A to oznacza pozytywną odpowiedź na postawione pytanie.

2. $X \neq \varnothing$: Wtedy zdanie *dla każdego $x \in X$ istnieje takie $y \in \varnothing$, że* $x = f(y)$ jest fałszywe, co tym razem oznacza odpowiedź negatywną.

Interesujący wydaje się przypadek, gdy $X = \mathbb{R}$. Wtedy o funkcji f można powiedzieć bardzo dużo: jest parzysta, nieparzysta, silnie rosnąca, silnie malejąca, ciągła, każdy punkt dziedziny jest jej miejscem zerowym, nie ma miejsc zerowych, w każdym punkcie ma ekstremum... Dość tego! Załóżmy, że dziedzina jest niepusta. ;–)

Szymon

[Zagadka logiczna]

Odkryłem trzy sąsiadujące ze sobą wyspy — A, B, C. Wiedziałem, że co najmniej na jednej z nich zostało zakopane złoto, lecz nie wiedziałem, na której. Wyspy B i C były niezamieszkane: na wyspie A mieszkali rycerze (którzy zawsze mówią prawdę) i łotrzy (którzy zawsze kłamią), zachodziła też możliwość, że są na niej jacyś zwykli ludzie, ale nie wiedziałem czy to prawda.

Tak się szczęśliwie złożyło, że znalazłem mapę wyspy, pozostawioną przez znanego, lecz niezrównoważonego kapitana Morisona -– pirata, który zakopał złoto. Wiadomość ta była oczywiście zaszyfrowana. Po rozszyfrowaniu okazało się, że składa się z dwóch zdań. Oto ich zapis:
1. Na wyspie A nie ma złota.
2. Jeśli na wyspie A są jacyś zwykli ludzie, to na dwóch wyspach jest złoto.

Cóż, popędziłem na wyspę A; wiedziałem, że tubylcy wiedzą tam o wszystkim co dotyczy złota. Król wyspy domyślił się, o co mi chodzi i powiedział bez ogródek, że wolno mi będzie zadać tylko jedno pytanie dowolnemu tubylcowi, jakiego sobie wybiorę. W żaden sposób nie mogę się dowiedzieć, czy ów tubylec jest rycerzem, łotrem czy zwykłym człowiekiem.

Moje zadanie polegało na obmyśleniu takiego pytania, bym po usłyszeniu odpowiedzi na nie mógł wskazać jedną z wysp i mieć pewność, że jest na niej złoto. Jakie pytanie powinienem zadać?

Zadanie pochodzi z książki R. Smullyana „Jaki jest tytuł tej książki?”.

Rozwiązanie zadania brzmi „Czy zdanie, że jesteś rycerzem, jest równoważne zdaniu, że na wyspie B jest złoto?”.
Załóżmy, że odpowiedź brzmi „tak”. Jeśli pytany jest rycerzem lub łotrem, to na wyspie B jest złoto (Czytelnik zastanowi się, dlaczego). Jeśli jest zwykłym człowiekiem, to złoto jest na wyspach B i C, w szczególności na wyspie B. Odpowiedź twierdząca oznacza tedy, że złoto jest na wyspie B.
Podobnie rozumując, otrzymujemy, że odpowiedź negatywna oznacza, że złoto jest na wyspie C.

ivril

[Harmonogram Święta Liczby Pi 2011]

w Instytucie Matematyki

3.14 (poniedziałek)


09.42-12.00 Uroczyste rozpoczęcie Święta Pi (SA III, Instytut Fizyki UŚ)


12.00-12.45 prof. Ryszard Rudnicki – *Czy biologia inspiruje rozwój matematyki i odwrotnie?* (s. 213)


12.00-20.00 Warsztaty KNM (sale: 224, 225, 226, 429, 341, 201, 208, 209)


12.30-15.00 Pilionerzy (s. 234)


13.00-13.45 prof. Wojciech Dzik – *Wyprawa w Himalaje 11π lat temu* (s. 213)


13.30-14.30 dr Żywilla Fechner – *Giełda: kiedy kupić, kiedy sprzedać* (s. 216)


14.00-14.45 dr Anna Szczerba-Zubek – *Wokół podzielności* (s. 213)

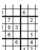

15.00-15.45 Piotr Idzik – *O pewnej szalonej funkcji* (s. 213)


13.00-16.30 dr Piotr Janoska – *Jak statystyka pomaga przyrodnikom?* (s. 213)


17.00-20.00 Pilionerzy (s. 234)


18.00-18.45 mgr Łukasz Dawidowski – *Πękny Πotr πecze πkantną πzzę* (s. 213)

3.15 (wtorek)


09.00-09.45 Mateusz Jurczyński – *Matematyka w sudoku* (s. 213)


09.00-14.30 Warsztaty KNM (sale: 224, 225, 226, 429, 341, 208, 209)


09.00-12.00 Tour de Science


10.00-10.30 mgr Łukasz Dawidowski – *O przestrzeniach Banacha* (s. 213)


10.30-14.00 Pilionerzy (s. 234)


10.45-11.30 mgr Michał Stolorz – *Iteracje* (s. 213)


11.45-12.45 dr Tomasz Kochanek – *Obrazy, sygnały i informacje* (s. 213)


13.00-13.45 dr Jolanta Sobera – *O ciasteczkach przy ciasteczkach*(s. 213)


13.00-15.00 Finał konkursu *Epigramat* (sale 533 i 535)


14.00-15.00 Konkurs *Origami* (sala 209)


16.20-17.15 Rozdanie nagród (Kinoteatr Rialto w Katowicach)


17.30-18.15 dr Marek Grajek – *Enigma* (Kinoteatr Rialto w Katowicach)

18.30-20.30 projekcja filmu *The Social Network* (Kinoteatr Rialto w Katowicach)

[Czy wiesz, że...]

- W zapisie angielskim każda liczba całkowita większa niż 8 ma przynajmniej dwie litery wspólne z każdym ze swych sąsiadów?
- Ludzi niewierzących w istnienie zbiorów nieskończonych nazywamy ultrafinitystami i swój rozwój przeżywają od roku 1959...
- A tych niewierzących w istnienie zbiorów możliwych do uzyskania ze zbioru wszystkich liczb naturalnych w skończonej liczbie kroków nazywamy finitystami i pierwsi finityści pojawili się już przed Arystotelesem?
- W zapisie angielskim „cztery" jest jedyną liczbą, która ma tyle samo liter, jak wartość, którą wyraża?
- Jeżeli przetasujesz w sposób losowy talię 52 kart, prawdopodobieństwo, że uzyskasz dane ich ułożenie jako pierwszy człowiek w historii ludzkości jest całkiem spore? Po prostu możliwości ułożenia się tych 52 kart jest przeogromnie dużo – 52!, czyli ponad 10^{42}, a gdyby od powstania Wszechświata co sekundę przetasowywane byłoby milion talii, do dziś zobaczylibyśmy tylko 10^{24} kombinacji...
- Matematycznie udowodniono, że jeżeli przetniesz pizzę przynajmniej czterema prostymi przecinającymi się w jednym punkcie (niekoniecznie w środku pizzy – byle tylko nie na jej brzegu) i razem z kolegą bierzecie kawałki na zmianę, to każde z Was zje dokładnie połowę pizzy?
- Od strony matematycznej najkorzystniejsze dla mężczyzny jest wzięcie ślubu w wieku ok. 31 lat? (najkorzystniejsze w tym sensie, że wtedy już najprawdopodobniej poznał dziewczynę, która jest dla niego „dostatecznie dobra", a nie jest jeszcze za stary na zakładanie rodziny)

Niewinny Rosomak

[Stopka redakcyjna]

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:
macierzator@knm.katowice.pl www.knm.katowice.pl

marzec 2011