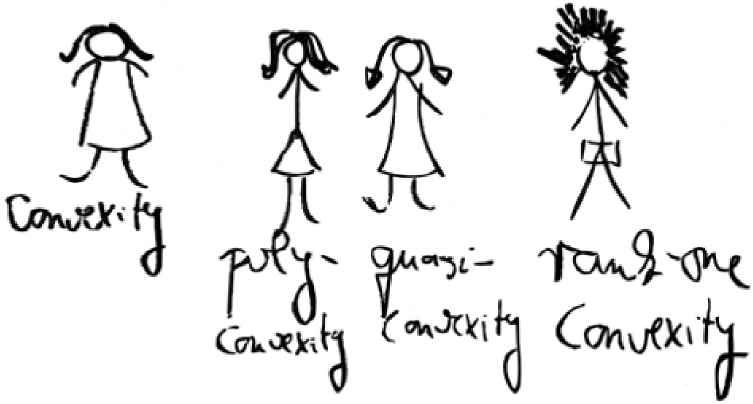
[MACIERZATOR40]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



Witamy w pierwszym po wakacjach numerze [MACIERZATORa]!

Nowy rok akademicki rozpoczynamy w Macierzatorze bardzo „okrągło” – to już czterdzieste wydanie, a zawiera aż dwadzieścia cztery strony! W tym numerze opowiemy o algebraiczno-kombinatorycznym zadaniu, z którym mierzyli się uczestnicy wakacyjnego *International Mathematics Competition for University Students*, pokażemy, jak ogólnie można spojrzeć na prostą własność punktów kratowych, poruszymy temat wypukłości (stąd też Convex Sisters na okładce – serdecznie pozdrawiamy w tym miejscu ich Autora, Profesora Wolfganga Reichela), zapoznamy Czytelników nieco z C*-algebrami i wreszcie z lekkim przymrużeniem oka spóbujemy Was przekonać, że π wcale nie jest tak oczywista, jak mogłoby się wydawać. Znajdziecie również kolejną część Kącika TEX-owego oraz pewien ciekawy problem lokalnie otwarty.

Miło nam również poinformować, że wydanie elektroniczne [Macierzatora] otrzymało numer ISSN 2083-9774.

Redakcja

ISSN 2083-9774

[Impresje olimpijskie]

Potęga liniowej zależności

Zawody matematyczne IMC (*International Mathematics Competition for University Students*) odbywają się corocznie od 1994 roku i polegają na rozwiązaniu 10 zadań w trakcie dwóch 5-godzinnych sesji, po 5 zadań na każdą. W XVIII edycji IMC, która odbyła się w tym roku, wzięli udział studenci z aż 44 krajów, a pozycję pierwszą w klasyfikacji drużynowej zajęli reprezentanci Uniwersytetu Jagiellońskiego. Pierwsze miejsce w klasyfikacji indywidualnej zajął zaś bezkonkurencyjny Przemysław Mazur z UJ (trzykrotny zwycięzca krajowej Olimpiady Matematycznej), który jako jedyny rozwiązał wszystkie zadania.

W tym artykule omówimy jeden z najciekawszych problemów tegorocznej edycji IMC, który w elegancki sposób wiąże rozumowania kombinatoryczne z elementami algebry liniowej. Było to ostatnie, piąte, zadanie zaproponowane podczas pierwszego dnia zawodów.

Zadanie. *Niech V będzie $(2n-1)$-wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem dwuelementowym, gdzie n jest pewną liczbą naturalną. Wykazać, że dla dowolnych wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_{4n-1} \in V$ istnieje taki ciąg indeksów $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{2n} \leqslant 4n-1$, że*

$$v_{i_1} + v_{i_2} + \ldots + v_{i_{2n}} = 0. \tag{1}$$

Oczywiście $V = \mathbb{Z}_2^{2n-1}$ jest po prostu przestrzenią $(2n-1)$-elementowych ciągów zero-jedynkowych z dodawaniem binarnym i zwykłym mnożeniem przez 0 i 1. Aby bardziej oswoić się z tezą naszego zadania, zapiszmy jakiś prosty przykład, powiedzmy dla $n = 2$. W tym przypadku mamy danych siedem ciągów długości 3, np.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1

Teza zadania orzeka, że z wektorów tych można wybrać cztery sumujące się do wektora zerowego. Po chwili refleksji rzeczywiście odnajdujemy taką czwórkę: $v_1 + v_2 + v_5 + v_6 = 0$. Jak jednak znaleźć ogólną metodę postępowania, niezależną od konkretnego układu wektorów? Ponieważ mamy otrzymać wektor zerowy długości 3, moglibyśmy próbować dokonać naszego doboru „współrzędna po współrzędnej”. Aby zagwarantować zerowanie się pierwszej z nich, powinniśmy wybrać cztery wektory tak, aby na pierwszej współrzędnej była parzysta liczba jedynek. Można to oczywiście wykonać na wiele sposobów, ale niestety trudno kontrolować, by nasz pierwszy wybór dopuszczał spełnienie warunku parzystej liczby jedynek na kolejnych współrzędnych. Podejście „współrzędna po współrzędnej” prowadzi raczej do frustracji niż rozwiązania zadania.

Zauważmy, że równanie (1) to nic innego jak liniowa zależność naszych wektorów (elementy naszego ciała to tylko 0 i 1); wyraża ono jednak też coś więcej: istnienie zerowej kombinacji, w której *dokładnie* $2n$ współczynników wynosi 1. To, że nasze wektory w ogóle są liniowo zależne, jest sprawą oczywistą, ale widocznie jest ich też na tyle dużo, że możemy znaleźć ich zerową kombinację liniową spełniającą jeszcze ten dodatkowy warunek. No właśnie, $4n-1$ to wystarczająco dużo… A może wystarczyłoby jednak trochę mniej? Czy w ogóle ma znaczenie fakt, że wymiar przestrzeni V jest nieparzysty? Moglibyśmy od razu spróbować podać przykład $4n-2$ wektorów (np. dla $n=2$), z których nie da się wybrać $2n$ sumujących się do zera (co pokazywałoby, że teza zadania jest optymalna), ale wrócimy do tej kwestii za chwilę, uzbrojeni w zasadniczy pomysł prowadzący do rozwiązania.

Idea jest bardzo prosta: rozważyć przestrzeń liniową zerowych kombinacji liniowych naszych wektorów. Mówiąc precyzyjniej, interesować nas będzie przestrzeń wektorowa $\mathcal{C} < \mathbb{Z}_2^{4n-1}$ określona jako

$$\mathcal{C} = \Big\{(t_1, \ldots, t_{4n-1}) \in \mathbb{Z}_2^{4n-1} :\ \sum_{i=1}^{4n-1} t_i v_i = 0\Big\}.$$

Skoro wiemy, że $v_1, \ldots, v_{4n-1}$ są liniowo zależne, w przestrzeni $\mathcal{C}$ jest „sporo” elementów, a pytanie, na które należy odpowiedzieć, to: czy jest ich na tyle sporo, aby $\mathcal{C}$ zawierała choć jeden wektor z dokładnie $2n$ jedynkami? To dawałoby tezę zadania.

Choć idea wydaje się bardzo prosta, nie należy jej lekceważyć. Omówimy później pewien ważny (i niełatwy!) problem geometryczno-kombinatoryczny, w którego rozwiązaniu idea ta pełni rolę absolutnie fundamentalną. Problem zaś ma głębokie implikacje w probabilistyce i analizie funkcjonalnej.

Wróćmy do naszego zadania. Pytanie o wielkość przestrzeni $\mathcal{C}$ jest przede wszystkim pytaniem o jej wymiar. Jeżeli współrzędne wektora v_i oznaczymy jako $(v_{i1}, \ldots, v_{i,2n-1})$ (dla $1 \leqslant i \leqslant 4n-1$), to $\mathcal{C}$ jest po prostu przestrzenią rozwiązań $(t_1, \ldots, t_{4n-1}) \in \mathbb{Z}_2^{4n-1}$ układu równań liniowych

$$\left\{\begin{array}{ccc} v_{11}t_1 + \ldots + v_{4n-1,1}t_{4n-1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1,2n-1}t_1 + \ldots + v_{4n-1,2n-1}t_{4n-1} & = & 0. \end{array}\right.$$

Nasz stary, dobry znajomy, czyli twierdzenie Kroneckera–Capellego, podpowiada nam, że przestrzeń rozwiązań ma wymiar będący różnicą między liczbą niewiadomych, a rzędem macierzy układu. Tak więc $\dim \mathcal{C} \geqslant (4n-1)-(2n-1) = 2n$. Czy to wystarczy, aby $\mathcal{C}$ zawierała wektor o dokładnie $2n$ współrzędnych równych 1? Tak! Wektory takie można bowiem uzyskać jako różnicę $u - v$, o ile tylko u ma dokładnie o $2n$ więcej jedynek niż v, i ma jedynki wszędzie tam, gdzie ma je v. Oznaczmy

$$u_i = (\underbrace{1,\ldots,1}_{i},0,\ldots,0) \quad \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant 4n-1.$$

Jeżeli $u_{2n} \in \mathcal{C}$, to mamy tezę; załóżmy więc, że $u_{2n} \notin \mathcal{C}$. Rozważmy następujące pary wektorów:

$$(u_{2n+1},u_1),(u_{2n+2},u_2),\ldots,(u_{4n-1},u_{2n-1}). \tag{2}$$

Ponieważ jest ich dokładnie $2n-1$, a $\dim \mathcal{C} \geqslant 2n$, istnieje wśród nich para, której obydwa składniki należą do $\mathcal{C}$ (zasada szufladkowa Dirichleta). W przeciwnym razie wymiar przestrzeni dopełniającej $\mathcal{C}$ do $\mathbb{Z}_2^{4n-1}$ wynosiłby co najmniej $(2n-1)+1$ (dodaliśmy wektor u_{2n}), co przeczyłoby nierówności $\dim \mathcal{C} \geqslant 2n$. Zauważmy w końcu, że jeżeli (u_{2n+j},u_j) jest parą, o której wyżej mowa, to mamy $u_{2n+j}-u_j \in \mathcal{C}$, a więc otrzymaliśmy wektor o dokładnie $2n$ jedynkach, należący do $\mathcal{C}$.

Możemy teraz odpowiedzieć na pytanie o optymalność liczby $4n-1$ w tezie zadania. Analizując nasz dowód, widzimy, że jedynym sposobem popsucia tej tezy jest zmniejszenie wymiaru przestrzeni $\mathcal{C}$. Gdybyśmy mieli jedynie $4n-2$ wektorów $v_1,\ldots,v_{4n-2} \in V$, dla których dodatkowo

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{4n-2,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1,2n-1} & v_{2,2n-1} & \cdots & v_{4n-2,2n-1} \end{bmatrix} = 2n-1,$$

to $\dim \mathcal{C} = (4n-2)-(2n-1) = 2n-1$ i możliwe, że wówczas przestrzeń $\mathcal{C}$ zawierałaby tylko po jednym elemencie każdej pary w ciągu (2). Moglibyśmy np. przyjąć $\mathcal{C} = \operatorname{span}\{u_1,u_2,\ldots,u_{2n-1}\}$; przykładowym układem równań, którego przestrzenią rozwiązań jest $\mathcal{C}$ jest wówczas $t_{2n} = t_{2n+1} = \ldots = t_{4n-1} = 0$, który odpowiada wektorom: $v_1 = \ldots = v_{2n-1} = 0$ oraz $v_{2n+j} = \varepsilon_{j+1}$ (wektory bazy kanonicznej) dla $0 \leqslant j \leqslant 2n-2$.

Jak widać, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ dysponujemy kontrprzykładem pokazującym, że spośród $4n-2$ wektorów przestrzeni V niekoniecznie można wybrać $2n$ sumujących się do wektora zerowego.

Przekonaliśmy się, że pomysł, aby spojrzeć na zbiór kombinacji liniowych jak na przestrzeń wektorową, prostą drogą doprowadził do rozwiązania zadania z IMC. Przejdźmy teraz do innego problemu, którego źródło tkwi w klasycznym twierdzeniu Riemanna: dla każdego warunkowo zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ liczb rzeczywistych, oraz każdej liczby $t \in \mathbb{R}$, istnieje taka permutacja σ zbioru liczb naturalnych, że $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = t$. Co będzie jeżeli liczby rzeczywiste zastąpimy zespolonymi? Oczywiście twierdzenie Riemanna, w niezmienionym brzmieniu, przestaje być prawdziwe, na co wskazuje przykład szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2 + \mathrm{i}(-1)^n/n)$. Nasuwa on następujące przeformułowanie, które okazuje się być całkowicie trafnym analogonem twierdzenia Riemanna dla liczb zespolonych i nie tylko:

Twierdzenie Lévy'ego–Steinitza. *Niech $d \in \mathbb{N}$ oraz $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^d$. Wówczas zbiór sum postaci $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$, gdzie σ przebiega zbiór wszystkich permutacji $\mathbb{N}$, jest albo zbiorem pustym, albo zbiorem postaci $v + V$, gdzie $v \in \mathbb{R}^d$, a V jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^d$.*

Dowód tego twierdzenia jako pierwszy ogłosił Paul Lévy w 1905 roku, jednak w 1913 roku Ernst Steinitz znalazł w nim lukę i podał nowy dowód, już całkowicie poprawny. Twierdzenie to jest nieporównanie trudniejsze niż oryginalne twierdzenie Riemanna! Przytoczymy tutaj fragment z przeglądowego artykułu Petera Rosenthala [1]: *I was told of the Lévy–Steinitz Theorem by Israel Halperin. The first few times that he started to explain the proof to me, I didn't listen; I assumed that I could prove the theorem in some easier way. Finally, after I realized I couldn't prove it, I let him describe the proof.*

Co to ma wspólnego z ideą rozważania przestrzeni kombinacji liniowych? Otóż twierdzenie Lévy'ego–Steinitza dość łatwo sprowadza się do pewnego pięknego, geometryczno-kombinatorycznego faktu, który można wypowiedzieć następująco:

Lemat Steinitza. *Jeżeli $\{x_j\}_{j=1}^{n} \subset \mathbb{R}^d$ oraz $\|x_j\| \leqslant 1$ (norma euklidesowa) dla $1 \leqslant j \leqslant n$, to dla pewnego ciągu $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{n} \subset \{-1, 1\}$ mamy $\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j\| \leqslant \sqrt{d}$.*

W przyszłych *Impresjach* omówimy bliżej lemat Steinitza wraz z różnymi jego wariacjami i zobaczymy, jak cenna jest idea badania przestrzeni zależności liniowych. Póki co, Czytelnik jest gorąco zachęcany do podjęcia próby samodzielnego wykazania lematu Steinitza. Powodzenia!

[1] P. Rosenthal, *The remarkable theorem of Lévy and Steinitz*, Amer. Math. Monthly 94 (1987), 342–351.

Tomasz Kochanek

Autor artykułu jest adiunktem w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach.

[Twierdzenie o zbiorach prawie skończonych]

W książce [6] Hugon Steinhaus zawarł wiele ciekawych zadań z matematyki elementarnej. Niektóre z nich dotyczą zbioru punktów kratowych, tzn. punktów płaszczyzny euklidesowej, których współrzędne są liczbami całkowitymi. Jednym z tych problemów jest następujące pytanie:

> Czy dla każdego $N \in \mathbb{N}$ istnieje na płaszczyźnie koło, które zawiera dokładnie N punktów kratowych?

Można pokazać, używając prostych argumentów z geometrii analitycznej i teorii liczb, że odpowiedź na powyższe pytanie brzmi: tak (zob. [4]).

W niniejszym artykule pragnę przedstawić autorskie uogólnienie rozpatrywanego zadania Steinhausa na przestrzenie Hilberta (zob. [7, 8]). Do zrozumienia tekstu wymagana jest podstawowa wiedza z analizy funkcjonalnej i topologii, szczególnie z teorii przestrzeni Hilberta i wypowiedź twierdzenia Baire'a o kategoriach (wymagane wiadomości można znaleźć np. w [3, 5, 8]).

Oprócz samego przeniesienia problemu na ogólniejsze przestrzenie i szerszą klasę zbiorów „prawie skończonych" (odpowiedników zbioru punktów kratowych z powyższego problemu) dodatkowo pokażę, że istnieją punkty y o tej własności, że dla dowolnego N pewna kula o środku w y zawiera dokładnie N punktów należących do z góry zadanego zbioru „prawie skończonego". Okaże się również, przy zastosowaniu twierdzenia Baire'a o kategoriach, że zbiór punktów o wyżej wymienionej własności jest gęsty, co stanie się dość dobrym narzędziem do wykazywania nieunitarności przestrzeni (artykuł o tego typu zastosowaniach znajdzie się w następnym numerze [Macierzatora]).

Przed rozpoczęciem głównej części artykułu należy jeszcze zwrócić uwagę, że problemy Steinhausa o punktach kratowych stały się inspiracja do badań matematycznych. Np. w [2] autorzy rozważają problem istnienia zbioru, który ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdym podzbiorem, który jest przystający do zbioru wszystkich punktów kratowych. Również w [1] pewne uogólnienia następnych trzech problemów Steinhausa są rozważane.

Przechodząc do części głównej artykułu, zaczniemy od wprowadzenia następującej definicji. Powiemy, że zbiór A jest *prawie skończony* w przestrzeni metrycznej X, jeżeli A jest zbiorem nieskończonym i dowolna kula w X zawiera tylko skończoną liczbę jego elementów. Drugi warunek implikuje, że zbiór A jest przeliczalny. Na przykład zbiór punktów kratowych w skończenie wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej jest prawie skończony.

W artykule wykorzystamy jeszcze pewien fakt z analizy funkcjonalnej.

Lemat 1. *Niech Y będzie właściwą podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej X. Wówczas Y jest zbiorem brzegowym w X.*

Głównym wynikiem niniejszej pracy jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że A jest zbiorem prawie skończonym w przestrzeni Hilberta X. Istnieje wówczas zbiór Y gęsty w X taki, że dla dowolnego $y \in Y$ i dowolnej liczby naturalnej N istnieje kula o środku w punkcie y, która zawiera dokładnie N elementów zbioru A.*

Dowód. Oznaczmy przez $x_1, x_2, \ldots$ elementy zbioru A. Możemy założyć, że $x_i \neq x_j$, gdy $i \neq j$. Ustawmy w ciąg (a_n) zbiór par postaci (x_i, x_j), gdzie $i < j$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy

$$A_n = \big\{x \in X : \|x_i - x\| = \|x_j - x\|\big\},$$

jeżeli $a_n = (x_i, x_j)$.

Zauważmy, że $A_n = \varphi^{-1}(\{0\})$, gdzie $\varphi(x) = \|x_i - x\| - \|x_j - x\|$. Z twierdzenia o ciągłości normy otrzymujemy, że φ jest funkcją ciągłą, więc A_n jest zbiorem domkniętym jako przeciwobraz zbioru domkniętego przez przekształcenie ciągłe.

W celu pokazania, że zbiór A_n jest brzegowy niech $\psi\colon X \to X$ będzie dana wzorem

$$\psi(x) = x + \frac{x_i + x_j}{2}$$

oraz $w = \frac{x_i - x_j}{2}$. Zauważmy, że $w \neq 0$, ponieważ wyrazy ciągu (x_i) są parami różne. Wówczas

$$\psi\big(\{x \in X : \|w - x\| = \|w + x\|\}\big) = A_n.$$

Ponieważ przesunięcie zbioru brzegowego o dowolny wektor jest zbiorem brzegowym, więc wystarczy pokazać, że

$$B_n = \big\{x \in X : \|w - x\| = \|w + x\|\big\}$$

jest zbiorem brzegowym. Weźmy dowolny $x \in B_n$. Zachodzi wówczas:

$$\begin{aligned}
\|w - x\| &= \|w + x\| \\
\langle w - x | w - x\rangle &= \langle w + x | w + x\rangle \\
\|w\|^2 - \langle w|x\rangle - \langle x|w\rangle + \|x\|^2 &= \|w\|^2 + \langle w|x\rangle + \langle x|w\rangle + \|x\|^2 \\
\langle w|x\rangle &= -\langle x|w\rangle \\
\overline{\langle x|w\rangle} + \langle x|w\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Z powyższych równości wynika, że $\mathfrak{Re}\,\langle x|w\rangle = 0$. Oznacza to, że

$$B_n = \big\{x \in X : \mathfrak{Re}\,\langle x|w\rangle = 0\big\}.$$

Łatwo sprawdzić, że B_n jest podprzestrzenią liniową X, jeżeli X będzie traktowana jako przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Dodatkowo B_n jest właściwą przestrzenią, bo $w \notin B_n$. Z lematu 1 wynika, że B_n jest zbiorem brzegowym. Stąd również zbiór A_n jest zbiorem brzegowym dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Z twierdzenia Baire'a wynika, że zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jest zbiorem brzegowym w X. Jeżeli oznaczymy przez Y dopełnienie tego zbioru, to oczywiście Y będzie zbiorem gęstym.

Weźmy dowolne $N \in \mathbb{N}$. Jeżeli $y \in Y$, to $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K(y,n)$. Istnieje zatem takie n_0, że $|K(y,n_0) \cap A| \geqslant N$. Oznaczmy przez $y_1, \ldots, y_n$ $(n \geqslant N)$ liczby ze zbioru $K(y,n_0) \cap A$ (jest ich skończenie wiele ze względu na to, że A jest prawie skończony). Niech r_i oznacza odległość punktu y od y_i $(i = 1, \ldots, n)$. Z konstrukcji zbioru Y wynika, że liczby $r_1, \ldots, r_n$ są parami różne, więc bez utraty ogólności możemy założyć, że prawdziwe są nierówności

$$r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_n < r_{n+1},$$

gdzie dodatkowo definiujemy: $r_0 = 0$ i $r_{n+1} = n_0$. Ponieważ $n \geqslant N$, więc możemy przyjąć za δ dowolną liczbę spełniającą $r_N < \delta < r_{N+1}$. Wówczas $K(y,\delta)$ zawiera dokładnie N punktów zbioru A. $\square$

Uwaga 1. Prawdziwe jest również analogiczne twierdzenie dla zbiorów skończonych przy oczywistym dodatkowym założeniu, że liczba N nie jest większa od mocy rozpatrywanego zbioru skończonego.

Twierdzenie 2 znajduje zastosowanie przy wykazywaniu, że pewne przestrzenie Banacha nie są przestrzeniami Hilberta. Jest to alternatywna metoda do tzw. tożsamości równoległoboku. Problem przedstawię w następnym numerze [Macierzatora].

Literatura

[1] H. T. Croft: *Three lattice-point problems of Steinhaus*, The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 33 (1982), no. 1, pp. 71-83.

[2] S. Jackson, R. D. Mauldin: *On a lattice problem of H. Steinhaus*, Journal of American Mathematical Society, vol. 15 (2002), no. 4, pp. 817-856.

[3] J. Musielak: *Wstęp do analizy funkcjonalnej,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1976.

[4] E. Piegat: *Zadania Hugona Steinhausa - znane i nieznane,* Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005.

[5] W. Rudin: *Analiza funkcjonalna,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.

[6] H. Steinhaus: *One hundred problems in elementary mathematics*, Dover Publications, 1965.

[7] P. Zwoleński: *Some generalization of Steinhaus' lattice points problem*, Colloquium Mathematicum, vol. 123 (2011), no. 1, pp. 129-132.

[8] P. Zwoleński: *Twierdzenie Baire'a i jego zastosowania*, praca dyplomowa licencjacka, Politechnika Śląska, Gliwice 2010 (do wglądu w bibliotece Instytutu Matematyki Politechniki Śląskiej).

Paweł Zwoleński (pawel.zwolenski@gmail.com)

[Dwa problemy z wypukłości]

We wrześniu tego roku członkowie Koła Naukowego Matematyków UŚ uczestniczyli w międzynarodowym intensywnym kursie matematycznym, zatytułowanym „Analytical and Computer Assisted Methods in Mathematical Models". W ramach jego zaliczenia, oprócz egzaminu, należało przygotować projekt związany z tematyką wyjazdu. My wybraliśmy problem zaproponowany przez Profesora Romana Gera, dotyczący analizy wypukłej; wydał się on nam ciekawy, toteż postanowiliśmy przetłumaczyć i opublikować w [Macierzatorze] nasze rozwiązanie.

Projekt składał się z dwóch części; pierwsza z nich sformułowana była następująco:

Podać przykład nieciągłej, wypukłej w sensie Jensena funkcji, która jest ograniczona z dołu na $\mathbb{R}$.

Pokażemy, że funkcją taką jest złożenie funkcji eksponencjalnej z nieciągłą funkcją addytywną. W dalszych fragmentach artykułu zajmiemy się drugą częścią projektu, to znaczy

Udowodnimy, że ograniczona z góry, wypukła funkcja z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ jest stała.

Oczywiście, można to wykazać na wiele sposobów; my wybraliśmy dwa: nasuwający się w sposób najbardziej naturalny dowód nie wprost oraz bezpośrednio.

Przywołajmy najpierw formalną definicję wypukłości w sensie Jensena: funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest wypukła w sensie Jensena, gdy dla wszelkich x, y

należących do D zachodzi następująca nierówność:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

W naszym przypadku $D = \mathbb{R}$. Równoważnie można powiedzieć, że funkcja f jest wypukła w sensie Jensena wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszelkich $\lambda \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ oraz wszelkich $x, y \in D$ prawdą jest, że

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Przypomnijmy również, że z analizy wypukłej wiadomo, że istnieje nieciągła funkcja f, która jest addytywna (czyli $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla wszelkich $x, y \in \mathbb{R}$).

Pokażemy teraz, że złożenie $g(x) = \exp(x)$ oraz nieciągłej addytywnej funkcji f jest poszukiwanym przykładem nieciągłej funkcji wypukłej w sensie Jensena, która jest ograniczona z dołu.

Niech f będzie nieciągłą addytywną funkcją określoną na $\mathbb{R}$ oraz niech $g(x) = \exp(x)$. Oznaczmy złożenie $g \circ f$ jako F. Weźmy $\lambda \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ i $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy f spełnia następujące równanie:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x).$$

Z wypukłości funkcji g otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \exp(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leqslant \\ &\leqslant \lambda \exp(f(x)) + (1-\lambda)\exp(f(x)) \leqslant \\ &\leqslant \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \end{aligned}$$

dla wszelkich $\lambda \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Oznacza to, iż F jest wypukła w sensie Jensena.

Pozostaje dowieść, że F jest ograniczona z dołu oraz nieciągła. Pierwsza własność jest spełniona w sposób oczywisty (ze względu na fakt, iż $\exp(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$). Nietrudno też uzasadnić prawdziwość drugiej tezy: gdyby F była ciągła, to $\ln F$ również musiałaby być ciągła, co prowadzi do sprzeczności, gdyż $\ln F = f$, zatem istotnie F jest nieciągła.

Reasumując, F jest nieciągłą wypukłą w sensie Jensena funkcją ograniczoną z dołu na $\mathbb{R}$, co należało wykazać.

Zajmiemy się teraz drugą częścią projektu, która, przypomnijmy, sformułowana była w sposób następujący:

Udowodnić, że ograniczona z góry, wypukła funkcja z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ jest stała.

Jak wspominaliśmy we wstępie, podamy dwa różne uzasadnienia tego faktu. Pierwszy z nich będzie dowodem nie wprost.

Załóżmy, że istnieje wypukła funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest ograniczona z góry (to znaczy, istnieje taka stała M, że dla wszelkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) \leqslant M$) oraz takie $x, y \in \mathbb{R}$, że $f(x) \neq f(y)$.

Bez straty ogólności możemy założyć, że $f(y) > f(x)$. Wtedy istnieje taka $0 < \lambda_0 < 1$, dla której prawdą jest, że

$$f(y) > \lambda f(x) \text{ dla } \lambda \in [1-\lambda_0, 1)$$

(innymi słowy: istnieje taka $\delta > 0$, że $f(y) - \lambda f(x) > \delta$).

Niech $\lambda \in [1-\lambda_0, 1)$; zdefiniujmy $z(\lambda) = \frac{y-\lambda x}{1-\lambda}$. Wtedy

$$y = \lambda x + (1-\lambda) z(\lambda).$$

Ze względu na wypukłość f mamy

$$f(y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z(\lambda))$$

dla $\lambda \in [1-\lambda_0, 1)$, zatem

$$\frac{\delta}{1-\lambda} \leqslant \frac{f(y) - \lambda f(x)}{1-\lambda} \leqslant f(z(\lambda)).$$

Wnioskujemy stąd, że jeśli λ dąży do jedynki, to $f(z(\lambda))$ zmierza do nieskończoności.

Ostatecznie istnieje $\bar{\lambda} \in [1-\lambda_0, 1)$, dla której $f(z(\bar{\lambda})) > M$, co jest niezgodne z założeniem. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że f musi być stała, co kończy pierwszy dowód.

Postawiony problem można rozwiązać również następująco: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$, że

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} f(t) - \varepsilon < f(x_\varepsilon).$$

Niech $x \in \mathbb{R}$. Możemy wtedy napisać, że

$$x_\varepsilon = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(2x_\varepsilon - x).$$

Zauważmy, że

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} f(t) - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(2x_\varepsilon - x) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2}\sup_{t\in\mathbb{R}} f(t),$$

a zatem

$$\frac{1}{2}\sup_{t\in\mathbb{R}} f(t) - \varepsilon < \frac{1}{2} f(x),$$

co oznacza (ze względu na dowolność ε), że $\sup_{t\in\mathbb{R}} f(t) \leqslant f(x)$. Oczywiście $\sup_{t\in\mathbb{R}} f(t) \geqslant f(x)$. Ostatecznie $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} f(t)$ dla wszelkich $x \in \mathbb{R}$, a zatem f jest stała, a to właśnie mieliśmy udowodnić.

Joanna Zwierzyńska, Paweł Zwoleński

Przedstawiony powyżej problem otwiera drogę do dalszych dyskusji. Poniżej prezentujemy komentarz do prezentowanego zagadnienia:

Sformułowanie problemu niejako wymusza użycie w jego rozwiązaniu (pewnej formy) Aksjomatu Wyboru (AC). Rzeczywiście, w pierwszej połowie XX wieku amerykański matematyk Henry Blumberg udowodnił, że każda mierzalna funkcja wypukła w sensie Jensena, która jest określona na całej prostej jest automatycznie wypukła[1].

Wydaje się, iż jesteśmy w dobrym momencie, by zastanowić się nad związkiem mierzalności i aksjomatyki ZF. Jest rzeczą należącą już do matematycznego folkloru, że o ile tylko teoria ZF jest niesprzeczna, to także teorie $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC}$ oraz $\mathsf{ZF} + \neg\mathsf{AC}$ są niesprzeczne. W tej drugiej my, matematycy, mamy dość ograniczone pole manewru (chociaż jest to bardzo subiektywne odczucie i zależy od punktu widzenia) – nie możemy na przykład udowodnić równoważności definicji ciągłości w sensie Cauchy'ego z definicją w sensie Heinego, ani nawet tego, że miara Lebesgue'a jest miarą. A gdzie w tym wszystkim są zbiory niemierzalne? Zakładając dodatkowo względem ZF, że każdy filtr w dowolnej algebrze Boole'a można rozszerzyć do ultrafiltru, możemy dowieść istnienia zbiorów niemierzalnych (a także twierdzenia Hahna–Banacha przy okazji!). Z drugiej strony wiadomo, że założenie to nie jest równoważne z AC. A co gdyby wszystkie zbiory były mierzalne? Czy jest to możliwe (czyt. niesprzeczne z ZF)? Gdyby tak było, nie byłoby funkcji niemierzalnych, a więc i rozwiązań naszego problemu! Okazuje się, że istnienie takiego bajkowego świata jest rzeczywiście niesprzeczne – Robert M. Solovay *skonstruował* model ZF, w którym mamy do dyspozycji pewną słabszą wersję Aksjomatu Wyboru (tzw. Regułę Wyborów Zależnych; jest ona jednak na tyle mocna, że możemy udowodnić, iż miara Lebesgue'a jest miarą) oraz wszystkie podzbiory prostej są mierzalne[2], tzn. w tym konkretnym modelu odpowiedź na nasz problem brzmi „Czy aby na pewno Panie Profesorze?”.

Tomek Kania

[1] H. Blumberg, „On convex functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 20. (1919), 40–44

[2] R.M. Solovay, „A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable”. *Annals of Mathematics* 92 (1970) 1–56

Autor komentarza proponuje również inny, prosty dowód faktu, że każda ograniczona z góry, wypukła funkcja z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ musi być stała:

Dowód. Załóżmy, że istnieje wypukła i ograniczona z góry funkcja f, która nie jest stala, tj. istnieją takie dwie liczby rzeczywiste x i y, że $f(x) > f(y)$. Ustalmy liczbę $\lambda \in (0, 1]$. Możemy zapisać:

$$x = x - (1-\lambda)y + (1-\lambda)y = x - y + \lambda y + (1-\lambda)y = \\ = \frac{\lambda(x-y)}{\lambda} + \lambda y + (1-\lambda)y = \lambda\left(\frac{x-y}{\lambda} + y\right) + (1-\lambda)y$$

Z wypukłości funkcji f wynika, że

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant \lambda f\left(\tfrac{x-y}{\lambda} + y\right) + (1-\lambda)f(y) \quad \Big| - (1-\lambda)f(y) \\ f(x) - f(y) + \lambda f(y) &\leqslant \lambda f\left(\tfrac{x-y}{\lambda} + y\right) \quad \Big| : \lambda \\ \tfrac{f(x)-f(y)}{\lambda} + f(y) &\leqslant f\left(\tfrac{x-y}{\lambda} + y\right) \end{aligned}$$

Ponieważ, z założenia $f(x) - f(y) > 0$, przechodząc do granicy przy $\lambda \to 0^+$, pokazujemy, że

$$+\infty = \lim_{\lambda\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(y)}{\lambda} + f(y)\right) \leqslant \liminf_{\lambda\to 0^+} f\left(\frac{x-y}{\lambda} + y\right),$$

to jest prawa strona powyższej nierówności ucieka do nieskończoności. Wynika stąd, że f jest, wbrew założeniu, nieograniczona. Sprzeczność. □

[Problemy (lokalnie) otwarte]

Postanowiliśmy, że, od obecnego numeru począwszy, będziemy na łamach [Macierzatora] zamieszczać różnego typu problemy otwarte i lokalnie otwarte – niektóre z nich będą miały stosunkowo łatwą odpowiedź, inne – będą problemami wciąż nierozwiązanymi. Proponujemy Czytelnikom, by spróbowali zmierzyć się z postawionymi problemami. W przypadku pytań, na które odpowiedź jest znana, będziemy ją publikować w kolejnym wydaniu [Macierzatora]. W tym miesiącu wybraliśmy dla Was problem zaproponowany przez Tomka Kanię:

Uzasadnić, że dla każdej ośrodkowej przestrzeni Banacha E istnieje różnowartościowy operator ograniczony $T\colon E \to \mathsf{H}$, gdzie H jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. Czy gdy $E = c_0$ operator ten może mieć domknięty obraz? Co w przypadku $E = \ell^1$? Bądź dla ℓ^π?

Odpowiedź na te pytania jest stosunkowo prosta. Czekamy na maile (nie tylko od studentów!) pod adresem `macierzator@knm.katowice.pl`!

[Pierwsze kwantowanie matematyki]

„Mnożenie macierzy nie jest przemienne!” – oto jeden z faktów, który najtrudniej zaakceptować studentom matematyki pierwszego roku. Trudność, która w tym miejscu się pojawia, związana jest z głęboko zakorzenionymi intuicjami na temat przemienności mnożenia liczb (a więc i funkcji). Ten szok wywołany pojawieniem się *nieintuicyjnej* własności studiowanych obiektów przypomina ten, który przeżyli niegdyś fizycy po opublikowaniu przez Wernera Heisenberga w pracy „Über quantentheretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen” w 1925 roku słynnej *zasady nieoznaczonosci*. W dużym uproszczeniu, konsekwencją tej zasady jest możliwość opisu zjawisk na poziomie kwantowym poprzez interpretowanie zmiennych zależnych od czasu w klasycznej fizyce newtonowskiej jako macierzy nieskończonych (tak zwanych obserwabli). W nowoczesnym ujęciu mechaniki kwantowej o macierzach tych myśli się, za Johnem von Neumannem, jako o operatorach samosprzężonych na (ośrodkowej) przestrzeni Hilberta[3].

Dość dobrze może podsumować powyższy akapit następujacy, banalny, ale jakże trafny slogan – „Operatory to *skwantowane* funkcje!” Rzeczywiście, idea *nieprzemiennej matematyki*, o ile nie będzie nadużyciem nazwanie zbiorczo wielu już dorosłych dziedzin matematyki, które w jakiś sposób odwołują się do pojęcia przestrzeni Hilberta, jest odnajdywanie *nieprzemiennych* (cokolwiek by to na razie nie znaczyło) odpowiedników znanych pojęć (jak na przykład przestrzeń topologiczna, przestrzeń z miarą, przestrzeń Banacha, grupa itp…) oraz „wyciskania” z nich tego, czego często wycisnąć się nie da w klasycznym przypadku.

Aby nie szukać daleko, zatrzymajmy się na moment przy pojęciu C*-algebry. Naszym celem jest uzasadnienie kolejnego sloganu, że „C*-algebry to nieprzemienne (albo skwantowane) przestrzenie topologiczne”. Dla ustalenia uwagi, pomyślmy na moment o lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa K. Tak naprawdę, wszystkie istotne informacje o przestrzeni K zakodowane są w algebrze Banacha $C(K)$ wszystkich zespolonych funkcji ciągłych na K i znikających w nieskończoności z działaniami określonymi punktowo oraz normą supremum. Mnożenie funkcji jest przemienne, a więc i sama algebra $C(K)$ jest przemienna. Zauważmy, że możemy zdefiniować nową operację $^*\colon C(K) \to C(K)$ (inwolucję) wzorem $f^*(z) = \overline{f(z)}$, $f \in C(K)$. Mamy ponadto $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(fg)^* = g^* f^*$, $(cf)^* = \bar{c} f^*$ oraz $\|ff^*\| = \|f\| \cdot \|f^*\|$ dla dowolnych $f, g \in C(K)$ oraz dowolnego skalara c. Algebry tego rodzaju są prototypami ogólniejszych C*-algebr – algebrę

[3] przypomnijmy, że operator liniowy T na przestrzeni Hilberta H jest samosprzężony, gdy $T = T^*$, tj. dla każdej pary elementów $a, b \in \mathsf{H}$ mamy $\langle Ta, b\rangle = \langle a, Tb\rangle$; każdy operator samosprzężony, określony na całej przestrzeni H, jest automatycznie ograniczony

Banacha A z inwolucją * nazywa się C*-algebrą, gdy spełniona jest równość $\|aa^*\| = \|a\| \cdot \|a^*\|$ dla każdego $a \in \mathsf{A}$. Jedno z fundamentalnych twierdzeń teorii C*-algebr, twierdzenie Gelfanda–Najmarka–Segala, głosi, że w istocie każda C*-algebra realizuje się wiernie jako (koniecznie domknięta) pod-C*-algebra algebry $\mathscr{B}(\mathsf{H})$ operatorów ograniczonych na pewnej przestrzeni Hilberta H (inwolucją w $\mathscr{B}(\mathsf{H})$ jest sprzężenie operatora). Nietrudno zauważyć, że w *przemiennym* przypadku określiliśmy funktor kontrawariantny z kategorii przestrzeni lokalnie zwartych w kategorię przemiennych C*-algebr, a ponadto twierdzenie Gelfanda–Najmarka–Segala sugeruje, że idea operatora dobrze uogólnia pojęcie funkcji.

W poniższej tabeli załączone jest porównanie pojęć topologicznych i ich nieprzemiennych odpowiedników. Ze względu na ograniczone łamy nie będziemy zagłębiać się w ich szczegóły, a zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do literatury wyszczególnionej na końcu.

Przestrzenie lokalnie zwarte	**C*-algebry**
funkcja ciągła	*-homomorfizm
homeomofizm	*-automorfizm
uzwarcenie	dołączenie jedynki
zbiór otwarty	ideał
zbiór domknięty	obraz przez *-homomorfizm
dopełnienie zbioru jednoelementowego	ideał maksymalny
punkt izolowany	ideał minimalny
miara Radona	funkcjonał dodatni

Powyższa lista jest oczywiście daleka od kompletnej.

Naturalnym pojęciem dla każdego matematyka jest pojęcie całki i całkowania (obecnie przez całkę rozumie się najczęściej całkę Lebesgue'a względem pewnej abstrakcyjnej miary – postaramy się pójść dalej tą drogą). Podobnie jak informacje o przestrzeni topologicznej kodowane są przez funkcje ciągłe na niej określone, tak samo informacje o mierze kodowane są przez funkcje mierzalne, które są ograniczone w sposób istotny (tj. wszystko rozgrywa się w przestrzeni Banacha L^∞). Mówiąc dokładniej, mając daną przestrzeń z miarą (X, μ) (aby nie mnożyć definicji załóżmy, że miara μ nie jest zbyt patologiczna – niech będzie ona, na przykład, σ-skończona) równie wygodnie jest myśleć o przestrzeni Banacha $L^\infty(\mu)$, która znów w naturalny sposób wyposażona jest w strukturę przemiennej C*-algebry[4]. Okazuje się, że obraz każdej reprezentacji tej C*-algebry w $\mathscr{B}(\mathsf{H})$ jest domknięty w

[4]Czytelnik znający twierdzenie Gelfanda–Najmarka wie, iż z twierdzenia tego wynika, że C*-algebra $L^\infty(\mu)$ jest *-izomorficzna z C*-algebrą postaci $C(K)$, gdzie K jest pewną przestrzenią zwartą; w pewnym sensie przestrzeń K jest zawsze *bardzo duża* – dla przykładu, jeżeli μ jest miarą Lebesgue'a na odcinku jednostkowym albo miarą liczącą na zbiorze przeliczalnym, to wynikowa przestrzeń K jest mocy $2^{\mathfrak{c}}$.

sensie zarówno słabej jak i mocnej topologii operatorowej (obydwie te topologie są słabsze od topologii pochodzącej od normy). Jest to niesłychanie mocna i porządna własność!

Pod-C*-algebry z jedynką algebry $\mathscr{B}(\mathsf{H})$, które są domknięte w słabej topologii operatorowej, nazywane są algebrami von Neumanna i w pewnym sensie spełniają rolę nieprzemiennych przestrzeni z miarą. Twierdzenie Sakai mówi, że dla każdej algebry von Neumanna $\mathscr{M}$ istnieje wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do izometrii taka przestrzeń Banacha $\mathscr{M}_*$, że $(\mathscr{M}_*)^* = \mathscr{M}$ oraz własność ta charakteryzuje algebry von Neumanna pośród C*-algebr. Sytuacja ta nie jest dla nas niczym nowym – mamy przecież dualność $L^1(\mu)^* = L^\infty(\mu)$! Z większością algebr von Neumanna można w naturalny sposób stowarzyszyć *nieprzemienne przestrzenie* L^p, $p \geqslant 1$ w ten sposób, że $\mathscr{M}_* = L^1(\mathscr{M})$ oraz $L^\infty(\mathscr{M}) = \mathscr{M}$[5]. Innym zaskakującym faktem jest twierdzenie von Neumanna mówiące, że C*-algebra z jedynką jest algebrą von Neumanna wtedy i tylko wtedy, gdy jest równa… komutantowi swojego komutanta (ten czysto algebraiczny warunek świadczy o olbrzymiej sile tego pojęcia!).

Możemy śmiało powiedzieć, że tak jak miara jest centralnym pojęciem w teorii miary, rachunku prawdopodobieństwa, a więc i pośrednio teorii procesów stochastycznych, tak samo pojęcie algebry von Neumanna jest punktem wyjścia do uprawiania nieprzemiennych odpowiedników tych dziedzin. Tak naprawdę dopiero tu rozpoczyna się przygoda z nieprzemienną matematyką, w której pojęcie algebry von Neumanna zawsze gdzieś się przewija. Świat ten jest już tak ogromny i tak dorosły, że czuję się lekko zmieszany, kończąc artykuł w miejscu, w którym wszystko się zaczyna. Ponieważ nie unikałem używania sloganów, pozwolę sobie użyć jeszcze jednego: kto raz wypłynie na ocean nieprzemiennej matematyki, nigdy nie będzie chciał na stale zadokować w porcie nazywanym *Przemienność*. Uff, teraz mogę już zakończyć.

Literatura

[1] W. Arveson, *An invitation to C*-algebras*, Springer-Verlag, New York, 1976

[2] B. Blackadar, *Operator algebras. Theory of C*-algebras and von Neumann algebras.* Springer, 2006

[3] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

Tomek Kania (`t.kania@lancaster.ac.uk`)

[5]Na przykład, gdy weźmiemy $\mathscr{M} = \mathscr{B}(\mathsf{H})$ oraz $p \geqslant 1$, przestrzeń $L^p(\mathscr{M})$ jest niczym innym jak przestrzenią operatorów zwartych na H, których ślad jest sumowalny w p-tej potędze; przy $p = 2$ jest to przestrzeń (Hilberta) operatorów Hilberta–Schmidta.

[Manifest τ]

Jaka jest najpiękniejsza stała w matematyce? Większość z nas, biednych, naiwnych, spaczonych wieloletnią propagandą, niewinnych umysłów bez namysłu odpowie „π!" Bo cóż może być piękniejszego niż stała wyrażająca stosunek obwodu okręgu do jego średnicy? Przecież ta stała występuje w tylu pięknych wzorach! W całkach we współrzędnych biegunowych:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r,\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

W rozkładzie normalnym:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

W transformatach Fouriera:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{2\pi ikx}\mathrm{d}k$$

Nawet w funkcji zeta Riemanna:

$$\zeta(2n)=\frac{B_n}{2(2n)!}(2\pi)^{2n}$$

Czy jednak zauważyliście coś interesującego? Coś nienaturalnego? Coś dziwnego w tych czterech wzorach (które są tylko przykładowe)? Bob Palais i Michael Hartl zauważyli. Mianowicie, to nie π występuje w tych wszystkich wzorach, ale stała znacznie ważniejsza i naturalniejsza – 2π. W swych artykułach „π is wrong!" i „The τ manifesto" proponują zerwanie z odwieczną tradycją i zastąpienie wszechobecnej stałej π stałą $\tau = 2\pi$. Ale dlaczego? Czy chodzi tylko o występowanie we wzorach? Czy dlatego nagle mamy się przestawiać na coś zupełnie nowego? Nie tylko dlatego. Przypatrzmy się kilku różnym argumentom dla zastąpienia π.

Po pierwsze, definicja. Rozważmy przestrzeń metryczną i kulę w niej. Kula ta jest zadana przez dwie rzeczy – jej środek i jej promień. W dziewięciu przypadkach na dziesięć gdy w matematyce mówimy o kuli, to mówimy o jej promieniu. Średnica jest czasami potrzebna (choć bardziej średnica zbioru niż średnica samej kuli), ale zazwyczaj jest ona po prostu dwukrotnością promienia. To promień jest istotny, a nie średnica. Stąd definicja π, jako „stałej koła", powinna zawierać w sobie właśnie promień, jako element istotniejszy niż średnicę. Skąd zatem średnica w tej definicji? To proste – π to liczba dość stara i zapewne została zdefiniowana tak a nie inaczej, bo mając jakieś „prawdziwe” koło łatwiej jest wyznaczyć za pomocą sznurka czy podobnej rzeczy jego średnicę niż promień... Nie zmienia to jednak faktu, że dziś branie tej średnicy jest po prostu nienaturalne.

Po drugie, aspekt pedagogiczny. Odpowiedzmy sobie na pytanie – o jaki kąt musimy się obrócić, by wykonać ćwierć pełnego obrotu? To proste – o $\frac{\pi}{2}$, bo jeden pełny obrót to 2π. Jedna ósma pełnego obrotu to $\frac{\pi}{4}$, jedna dwunasta $\frac{\pi}{6}$... Zaraz. Czy naprawdę ktokolwiek uważa to „mnożenie przez dwa” ilekroć chcemy przetłumaczyć język potoczny na matematyczny, za naturalne? Przypomnijmy sobie wszystkie jedynki w liceum z klasówki z trygonometrii, bo mało kto potrafił zamieniać kąty na radiany. Od strony pedagogicznej to podwajanie jest czymś okropnym! Przyjmując stałą $\tau = 2\pi$, otrzymujemy proste tłumaczenie języka potocznego na matematyczny – jeden obrót to τ, pół to $\frac{\tau}{2}$ i tak dalej, i tak dalej. Wygodniejsze, naturalniejsze, prostsze do wytłumaczenia uczniom. Same zalety!

Po trzecie, występowanie. Pokazaliśmy już kilka wzorów, gdzie istotne jest τ, a nie π. Weźmy teraz na warsztat tak zwane najpiękniejsze równanie matematyki:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Zapytuję wszystkich – co ono oznacza? Tak naprawdę nic z niego nie widać. Mamy w nim pięć matematycznych stałych, dodawanie i tyle. Ale co to oznacza? Jaka jest „intuicja” za tym równaniem? Ciężko powiedzieć. Cofnijmy się do definicji mnożenia liczb zespolonych. Mnożenie przez $e^{i\varphi}$ jest po prostu obrotem płaszczyzny o kąt φ – by to zobaczyć, wystarczy tylko chwilę się zastanowić. Jest zatem oczywiste, że pełny obrót jest identycznością, czyli, matematycznie rzecz biorąc,

$$e^{i\tau} = 1.$$

Mając w pamięci tę intuicję, powyższe równanie przestaje być „najpiękniejszym”, a staje się wręcz oczywistą tautologią. Naturalniejszą i łatwiejszą do natychmiastowego zobaczenia, niż $e^{i\pi} = -1$. Swoją drogą, postać $e^{i\pi}+1 = 0$ w ogóle jest nienaturalną żonglerką stałymi tylko po to, by w sztuczny sposób wprowadzić do równania ostatnią stałą matematyczną, jaką jest zero. Równie dobrze powyższe równanie możemy zapisać jako $e^{i\tau} = 1 + 0$ i również wyrazić wszystkie najważniejsze stałe w jednym równaniu.

No dobrze. Ale jest jeden wzór, gdzie π występuje bez tego irytującego czynnika 2. Chodzi tu mianowicie o pole koła – πr^2. Zapytacie „I co Ty na to, Rosomaku jeden?” A ja odpowiem, odwołując się do podstawowych wiadomości z fizyki. Weźmy najpierw na warsztat swobodny spadek. Jak wiadomo, prędkość ciała jest proporcjonalna do czasu spadku, a dokładnie wynosi ona $v = gt$, gdzie g to przyspieszenie ziemskie. By obliczyć położenie ciała, obliczamy następującą całkę:

$$y = \int v\mathrm{d}t = \int_0^T gt\mathrm{d}t = \frac{1}{2}gT^2.$$

Analogicznie, energia potencjalna sprężyny to całka z siły potrzebnej do jej rozciągnięcia, czyli $\frac{1}{2}kx^2$. Energia kinetyczna to całka z siły po położeniu, czyli $\frac{1}{2}mv^2$. A co to jest pole koła? Patrząc tak jak powyżej, w każdym z tych „fizycznych" przypadków mieliśmy do czynienia z dwiema proporcjonalnymi do siebie wielkościami (prędkość do czasu, siła do odległości, siła do przyspieszenia). W przypadku koła obwód jest prostopadły do promienia, a stosunek ten wynosi dokładnie τ. Pole koła o promieniu R wyraża się zatem wzorem

$$\int_0^R \tau r\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\tau R^2.$$

Stała $\frac{1}{2}$ jest w tym przypadku, po prostu, naturalna.

No dobra, pora zastanowić się nad dwiema rzeczami. Po pierwsze, czy ja mówię poważnie, a po drugie, dlaczego tę nową stałą powinniśmy oznaczać przez „τ". Ja jeno cytuję Boba Palaisa i Michaela Hartla, którzy są w stu procentach poważni i tak jak wprowadzono w fizyce „h kreślone" jako po prostu przeskalowanie zwykłego h o 2π(he, he, he), tak i teraz można wprowadzić τ. A dlaczego akurat ta literka? Po pierwsze, nie ma wielu innych stałych w matematyce czy fizyce, gdzie korzystano by akurat z niej, więc nie prowadziłoby to do nieporozumień. A po drugie, π jest pierwszą literą greckiego słowa oznaczającego obwód. Ogromną zaletą τ jest pełna analogia pomiędzy nim a obracaniem koła czy płaszczyzny o zadany kąt. A jak po grecku jest „obrót"? $\tau\acute{o}\rho\nu o\varsigma$. No a poza tym τ wizualnie przypomina π i jest dostępna we wszystkich matematycznych edytorach tekstu, więc taka zmiana byłaby po prostu wygodna.

Artykuł jest jeno sparafrazowaniem „The Tau Manifesto" autorstwa Michaela Hartla. Po więcej argumentów i kompletniejszy obraz całego problemu polecam zajrzeć na stronę `www.tauday.com` i samemu przeczytać i zgodzić się, bądź nie, z argumentacją owego pana. No i pamiętajmy by poza świętem π obchodzić od dziś święto τ 28 czerwca!

Niewinny Rosomak

[Motywacje, intuicje, konstrukcje]

czyli zaproszenie na XXXI wyjazdową sesję naukową KNM

Serdecznie zachęcamy wszystkich zainteresowanych do wyjazdu na wyjazdową konferencję Koła, która odbędzie się w szczyrkowskim Ośrodku Uniwersytetu Śląskiego, w dniach 10-13 listopada 2011 r. Tematem przewodnim wyjazdu są *Motywacje, intuicje, konstrukcje.*

Wzięcie udziału w sesji nie wiąże się z koniecznością wygłoszenia referatu, choć jest to bardzo mile widziane (osoby, które nie mają pomysłu na temat, mogą skorzystać na przykład z propozycji Tomka Kani i Pawła Zwoleńskiego, zamieszczonych na stronie Koła: `www.knm.katowice.pl`). Referat nie musi być ani długi, ani bardzo skomplikowany matematycznie - może odnosić się do innych dziedzin nauki. Aby wziąć udział w sesji, nie trzeba być członkiem Koła: mile widziani są wszyscy goście.

Koszt wyjazdu (noclegi oraz wyżywienie) szacujemy na około 90 zł. Więcej informacji organizacyjnych można znaleźć na stronie KNM. W razie jakichkolwiek pytań najlepiej skontaktować się bezpośrednio ze mną (np. pod adresem `j.zwierzynska@knm.katowice.pl`).

A jeśli nie możesz lub nie chcesz pojechać na sesję kołową, ale interesuje Cię działalność Koła i chcesz się w nią zaangażować? Po prostu wpadnij któregoś dnia do pokoju 524 w Instytucie Matematyki, lub, jeśli wolisz, przyjdź na któreś z kołowych spotkań referatowych – informacje o wszelkich formalnych spotkaniach umieszczane są na stronie Koła oraz kołowym profilu na Facebooku: www.facebook.com/knm.katowice. Przypominamy, że do KNM nie ma żadnych zapisów, ani też nie trzeba spełniać żadnych specjalnych warunków – nikomu nie będziemy robić wstępnego egzaminu!;)

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Redakcja: Mateusz Jurczyński, Tomasz Kochanek
Beata Łojan, Tomasz Kania, Paweł Zwoleński

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

`macierzator@knm.katowice.pl`.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`. Wydanie elektroniczne [Macierzatora] posiada numer ISSN: 2083-9774.

październik 2011

[Kącik TEXowy część 4]

fontowe ABC — krój, odmiana i stopień pisma; justowanie tekstu

Pierwszą powakacyjną część poświęcimy formatowaniu tekstu. Powiemy czym jest font oraz jakie są jego główne atrybuty, czyli krój, odmiana i stopień pisma. Na koniec pokażemy za pomocą jakich poleceń można tekst wycentrować lub złożyć w chorągiewkę.

Beata Łojan (`b.lojan@knm.katowice.pl`)

[Krój, odmiana i stopień pisma]

W klasycznym dokumencie LATEXowym dla poszczególnych elementów dokumentu (tytuły, przypisy,...) w sposób automatyczny (zależnie od wybranej przez nas klasy i opcji) zostają dobrane krój, odmiana czy stopień pisma. Użytkownik ma oczywiście możliwość ich zmiany; wystarczy w tym celu skorzystać z odpowiednich instrukcji czy pakietów.

Jak już zapewne zauważyliście, Kącik TEXowy składany jest innym fontem, niż reszta [Macierzatora]. *Font*, czyli cyfrowa postać pisma, jest zestawem informacji o kształtach poszczególnych liter i znaków danego kroju pisma. Znaczna część fontów jest niestety komercyjna, dlatego też Knuth wyposażył swój program we własne darmowe kroje pisma, które zostały zaprojektowane za pomocą programu METAFONT. W przypadku LATEXa bieżący font charakteryzowany jest przez pięć elementów, które można zmienić za pomocą oddzielnych poleceń:

❶ układ (zestaw) znaków – `\fontencoding{OT1}`;
❷ krój (rodzinę) pisma – `\fontfamily{cmr}`;
❸ grubość i szerokość pisma – `\fontseries{m}`;
❹ odmianę pisma – `\fontshape{n}`;
❺ stopień pisma – `\fontsize{10}{12}`;

Na koniec, by zatwierdzić wybór fontu i jego atrybuty dajemy `\selectfont`. Skróconą wersją powyższej serii poleceń jest instrukcja:

```
\usefont{kodowanie}{krój}{grubość}{odmiana}
```

dzięki, której jednocześnie możemy zmienić wszystkie (poza stopniem pisma) atrybuty fontu.

Znaki jakie są dostępne w danym foncie opisuje *układ fontu*. Wszystkie układy, których chcemy użyć w dokumencie powinniśmy wywołać jako opcje pakietu `fontenc`.

Przykładowe układy fontów

`OT1`	układ fontów zastosowany przez Knutha
`OT4`	układ fontów PL
`T1`	„europejski” układ fontów
`T4`	układ dla języków afrykańskich
`OML`	podstawowy font matematyczny
`OMS`	symbole matematyczne

Podstawowymi cechami każdego fontu są krój, odmiana i stopień pisma. Najważniejszym z nich jest *krój pisma*, który określa charakterystyczny wygląd i unikalność danej rodziny fontów. W standardowej klasie mamy do dyspozycji trzy kroje pisma — jeden krój szeryfowy (*Computer Modern Roman*), jeden bezszeryfowy (*Computer Modern Sansserif*) i jeden maszynowy (*Computer Modern Typewriter*).

Krój pisma (rodzina)

`\textrm{...}`	`\rmfamily` lub `\rm`	krój szeryfowy
`\textsf{...}`	`\sffamily` lub `\sf`	krój bezszeryfowy
`\texttt{...}`	`\ttfamily` lub `\tt`	`krój maszynowy`

Odmiana pisma[6] jest modyfikacją kroju danego fontu, poprzez zmianę grubości, szerokości czy pochylenia poszczególnych znaków z zachowaniem głównych cech charakterystycznych dla danego fontu. W TEXu dostępne są niżej wymienione odmiany, grubości i szerokości pisma.

Odmiana pisma

`\textit{...}`	`\itshape` lub `\it`	*kursywa*
`\textsc{...}`	`\scshape` lub `\sc`	KAPITALIKI
`\textsl{...}`	`\slshape` lub `\sl`	*pochyła*
`\textup{...}`	`\upshape`	prosta

Grubość i szerokość pisma

`\textmd{...}`	`\mdseries`	pismo jasne
`\textbf{...}`	`\bfseries` lub `\bf`	**pismo grube**

Ponadto instrukcją `\textnormal{tekst}` uzyskujemy tekst złożony głównym fontem dokumentu. Do wyróżnienia fragmentu tekstu możemy również skorzystać z polecenia `\emph{tekst}` (skrócona wersja `\em`), które wprowadza pismo pochyłe, a w przypadku zastosowania go na tekście pochyłym powoduje wyróżnienie go pismem prostym.

Ostatnim parametrem opisującym font jest *stopień pisma*, czyli wysokość między górną i dolną linią pisma. Stopień pisma jakiego chcemy używać w całym dokumencie, deklarujemy w preambule, w opcjach wybranej przez nas klasy. Mamy jednak możliwość późniejszej jego zmiany dla danego fragmentu tekstu; w tym celu musimy skorzystać ze środowiska postaci `\begin{wielkość}...\end{wielkość}` lub odpowiadającej mu deklaracji: `\wielkość`. Poniżej dostępne wielkości

Stopień pisma

`\tiny`, `\scriptsize`, `\footnotezize`, `\small`, `\normalsize`, `\large`, `\Large`, `\LARGE`, `\huge`, `\Huge`.

A na następnej stronie przykład zastosowania poleceń zmieniających odmianę i stopień pisma.

[6] Dla danego kroju pisma może istnieć nawet kilkadziesiąt jego odmian. Wszystkie odmiany danego fontu nazywamy czasem *garniturem*. Zdarzają się też kroje które zostają zaprojektowane tylko w jednej odmianie — nazywamy je *sierotami*.

przykład fonty.pdf

Baloniku MÓJ malutki *rośnij* duży **okrąglutki!**

przykład fonty.tex

```
{\scriptsize Baloniku} {\footnotesize\scshape mój} {\small malutki}
{\itshape rośnij} {\large duży} {\Large\bfseries okrąglutki!}
```

W zależnośći od początkowego stopnia pisma (wybranego przy opcji klasy), poszczególne wielkości będą przyjmowały inne wartości, co przedstawia tabela 1.

stopień pisma tekstu głównego	10pt	11pt	12pt
`\tiny`	5pt	6pt	6pt
`\scriptsize`	7pt	8pt	8pt
`\footnotesize`	8pt	9pt	10pt
`\small`	9pt	10pt	11pt
`\normalsize`	10pt	11pt	12pt
`\large`	12pt	12pt	14pt
`\Large`	14pt	14pt	17pt
`\LARGE`	17pt	17pt	20pt
`\huge`	20pt	20pt	25pt
`\Huge`	25pt	25pt	25pt

Tabela 1: Stopnie pisma

Do zmiany poszczególnych cech fontu możemy również skorzystać z poleceń wymienionych na samym początku (❶ – ❺), w argumencie podając oznaczenia kodowe dla poszczególnych wartości.

`\fontshape`

n	*normal*	prosta
it	*italic*	kursywa
sl	*slanted*	pochyła
sc	*small caps*	kapitaliki
ui	*upright italic*	

`\fontseries`

m	*medium*	zwykły
l	*light*	cienki
b	*bold*	gruby
sb	*semi-bold*	półgruby
c	*condensed*	wąski

```
\fontfamily{qpl}\fontseries{b}\selectfont \TeX\ Gyre Pagella
```

Poza wymienionymi do tej pory sposobami zmiany fontu, możemy jeszcze korzystać z pakietów fontowych, które podmienieją domyślny krój dokumentu. Przykładowo Kącik TEXowy składany jest krojem TEX Gyre Bonum (rodzina `qbk`) z kolekcji TEX Gyre — wystarczy dołączyć pakiet `tgbonum`. Dostępnych jest oczywiście wiele innych krójów, np:

❶ Antykwa Toruńska (rodzina – `anttor`; pakiet `anttor`)
❷ Iwona (rodzina – `iwona`; pakiet `iwona`)
❸ **Cyklop** (rodzina – `cyklop`; pakiet `cyklop`)
❹ *TEX Gyre Chorus* (rodzina – `qzc`; pakiet `tgchorus`)

Przy korzystaniu z poleceniem zmieniającym krój, odmianę czy stopień pisma należy pamiętać, iż nie dla każdego fontu dostępne są wszystkie znaki (są kroje, które nie zawierają polskich znaków) oraz wymienione opcje. Brak danej odmiany LaTeX sygnalizuje ostrzeżeniem postaci:

```
Font shape ‘OMS/qbk/m/n’ undefined
```

[Wyrównanie tekstu]

Domyślnie teskt składany w TEXu jest wyrównany jednocześnie do obydwu marginesów, jednak bez większego problemu możemy dany fragment tekstu wycentrować, czy złożyć w tzw. chorągiewkę (wyrównanie tylko do jednego z marginesów). Służą nam do tego trzy środowiska (oraz odpowiadające im deklaracje): `flushleft` (`\raggedright`) – wyrównanie do lewego marginesu, `center` (`\centering`) – wyśrodkowanie, `flushright` (`\raggedleft`) – wyrównanie do prawego marginesu.

Bez większych problemów możemy składać tekst w kilku kolumnach. Najprostszym sposobem złożenia tekstu w dwóch kolumnach jest użycie opcji klasy `twocolumn` — w przypadku, gdy chcemy cały dokument złożyć dwukolumnowo lub polecenia `\twocolumn`, gdy chcemy tak złożyć tylko część naszego dokumentu. Należy tu wspomnieć, że użycie polecenia `\twocolumn` powoduje rozpoczęcie nowej strony, chcąc tego uniknąć bądź złożyć tekst w więcej niż dwóch kolumnach wygodnie jest skorzystać z pakietu `multicol`[7]. Dostarcza nam on środowiska `multicols`, przy wywołaniu którego podajemy w ilu kolumnach ma zostać złożony dany fragment tekstu. Poszczególne kolumny możemy „łamać” ręcznie za pomocą instrukcji `\columnbreak` lub zezwolić, by LaTeX zrobił to za nas.

Justowanie i kolumny.pdf

Ten krótki fragment tekstu będzie wyrównany do lewego marginesu.	Natomiast ten fragment tekstu będzie wycentrowany.	Ostatni fragment tekstu będzie wyrównany do prawego marginesu.

Justowanie i kolumny.tex

```
\begin{multicols}{3}\begin{flushleft}
Ten krótki fragment tekstu będzie wyrównany do lewego marginesu.
\end{flushleft}\columnbreak
\begin{center}Natomiast ten fragment tekstu będzie wycentrowany.
\end{center}\columnbreak
\begin{flushright}
Ostatni fragment tekstu będzie wyrównany do prawego marginesu.
\end{flushright}\end{multicols}
```

✿ ✿ ✿

[7] Szczegółowo pakiet ten zostanie omówiony w następnej części