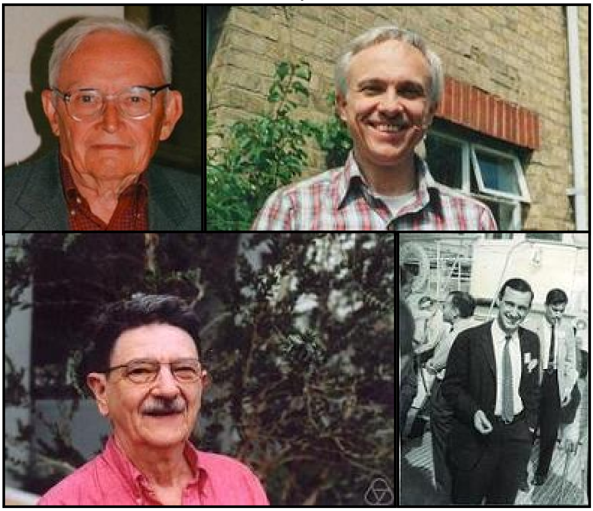
[MACIERZATOR41]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

Daniel Quillen

Witold Kołodziej



Patrick Billingsley

William Arveson

Witamy w listopadowym numerze [MACIERZATORa]!

Listopad jest miesiącem, w którym w szczególny sposób wracamy myślami do tych, którzy odeszli. W ciągu ostatnich dwunastu miesięcy pożegnaliśmy wielu wybitnych matematyków; zdjęcia czterech z nich publikujemy na okładce. Postanowiliśmy zatrzymać się na dłużej przy kimś, kto odszedł jednak nieco dawniej, bo półtora roku temu: przy jednym z największych matematyków ostatnich kilkudziesięciu lat, postaci wyjątkowej i fascynującej – Nigelu Kaltonie.

Kontynuujemy również opowieść o twierdzeniu o zbiorach prawie skończonych (które przybliżaliśmy w poprzednim wydaniu), podajemy nadesłane rozwiązanie ubiegłomiesięcznego problemu lokalnie otwartego oraz proponujemy kolejny; publikujemy także artykuł o spowalnianiu rozbieżności szeregów. Proponujemy Wam również zapoznanie się z podanymi w sposób nie do końca poważny wiadomościami o Short Track Master's Programme – nietypowym stypendium zagranicznym, w którym uczestniczą kolejni studenci naszego Instytutu. A na zakończenie: komiks autorstwa jednej ze studentek.

Dobrej lektury –
Redakcja

ISSN 2083-9774

[Nigel Kalton (1946–2010)]

Na świecie jest około 40000 matematyków. Ludzie myślą, że każdy z nas jest geniuszem. W rzeczywistości jest wśród nas jedynie od 50 do 100 prawdziwych geniuszy. Nigel był jednym z nich. Słowa te wypowiedział Peter Casazza – profesor matematyki na Uniwersytecie Missouri i wieloletni współpracownik Nigela Kaltona. Prosto i dobitnie oddają, jakiego formatu był to matematyk.

Nigel J. Kalton urodził się 20 czerwca 1946 r. w Bromley, dzielnicy Londynu. Bezpośrednio po ukończeniu studiów na Uniwersytecie w Cambridge rozpoczął tam pracę badawczą, poświęconą teorii przestrzeni Banacha. W 1970 r. obronił rozprawę doktorską pt. *Schauder Bases in Locally Convex Topological Vector Spaces*, napisaną pod kierunkiem Davida J.H. Garlinga, który wypromował też takich matematyków jak Stephen Dilworth, David H. Fremlin czy Richard Haydon. Za swoją pracę doktorską Nigel Kalton został przez macierzysty uniwersytet uhonorowany prestiżową Nagrodą Rayleigha. Po uzyskaniu stopnia pracował na Uniwersytetach Lehigh, Warwick oraz Swansea, po czym wyjechał, już na stałe, do Stanów Zjednoczonych. Głównym motywem były bardziej atrakcyjne warunki pracy – łatwiejszy dostęp do książek, czasopism, grantów, a także większe możliwości współpracy. Pracował na Uniwersytecie Illinois oraz Stanowym Uniwersytecie Michigan, by w 1979 r. przenieść się na Uniwersytet Missouri w Columbii, gdzie pracował już do końca życia.

Nigel Kalton był gigantem w dziedzinie analizy funkcjonalnej i jednym z najwybitniejszych jej przedstawicieli ostatnich kilkudziesięciu lat. Spektrum jego badań naukowych jest imponujące. W zakresie analizy funkcjonalnej obejmuje głównie: bazy i ciągi bazowe w przestrzeniach Banacha, przestrzenie quasi-unormowane, problem trzech przestrzeni, M-ideały oraz półgrupy operatorów, ale rozciąga się też na tak różnorodne dziedziny jak teoria gier, analiza harmoniczna, teoria ułamków łańcuchowych oraz geometria zbiorów wypukłych.

Jego niebywały talent do rozwiązywania trudnych matematycznych problemów stał się legendarny. Podczas konferencyjnego wykładu w Paryżu znakomity francuski matematyk Gilles Pisier opowiadał kiedyś o następującym problemie postawionym przez rosyjskiego matematyka Vladimira Pellera: rozstrzygnąć, czy dla każdego $\varepsilon > 0$ i każdego operatora T, spełniającego $\sup_n \|T^n\| < \infty$ (*power-bounded*), istnieje taki operator S podobny do T (tzn. $S = U^{-1}TU$, gdzie oba operatory U i U^{-1} są ograniczone), że $\sup_n \|S^n\| < 1 + \varepsilon$. Problem ten pozostawał bez rozstrzygnięcia przez 20 lat, a obecny wówczas na sali Kalton rozwiązał go zanim Pisier zdążył skończyć swój wykład. Zaproponowana metoda została później dopracowana, a kompletne rozwiązanie znajduje się w pracy [16] napisanej wspólnie z Christianem Le Merdym.

Innego razu Jerry Lange, który pracował z Kaltonem na Uniwersytecie Missouri, poprosił go o pomoc w sprawie pewnego problemu z teorii ułamków łańcuchowych, który związany był z jedną z notatek Ramanujana. Z notatki tej można odczytać, że jeżeli granica $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ istnieje, to ułamek łańcuchowy

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{\ddots}}} \tag{1}$$

jest zbieżny lub rozbieżny w zależności od tego, czy $a < 1/4$, czy też $a > 1/4$ (zob. [5, §32.5]). Jak większość notatek hinduskiego geniusza, także i ta podana była bez dowodu. Jej treść została matematycznie potwierdzona przez E.B. Van Vlecka w przypadku, gdy $a < 1/4$. Zauważono również, że zignorowana przez Ramanujana wartość $a = 1/4$ może dawać zarówno ułamki zbieżne, jak i rozbieżne. Lange pracował nad przypadkiem $a > 1/4$, i jemu podobnymi zagadnieniami, przez piętnaście lat, gdy w końcu zdecydował się na konsultację ze swym przyjacielem. Była to całkiem trafna decyzja, bo Kalton rozwiązał problem w ciągu 48 godzin, dowodząc następującego twierdzenia, które można znaleźć w pracy [15]: jeżeli $a > 1/4$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$, to ułamek łańcuchowy (1) jest rozbieżny. Co więcej, we wspomnianej wspólnej pracy Kaltona i Lange'a wykazano, że dla pewnych specjalnych ciągów (a_n) ułamek (1) jest zbieżny, a zatem hipoteza postawiona przez Ramanujana w tym przypadku okazała się fałszywa (choć trzeba przyznać, że był on bardzo bliski prawdy).

Relacje współpracowników Nigela Kaltona jednoznacznie wskazują, że jego wkład w badania matematyczne zawsze cechowała niezwykła głębia spojrzenia i odwaga w podejmowaniu (z sukcesem!) najtrudniejszych problemów, które współpracownicy pozbawieni jego pomocy zapewne zostawiliby nietknięte. Dirk Werner, profesor Wolnego Uniwersytetu Berlina, w swoim artykule [25] wspomina sytuację, gdy Kalton przesłał mu rozwiązanie trudnego i ważnego problemu w teorii M-ideałów – problemu, nad którym długo i bezskutecznie pracowała cała grupa młodych naukowców z Berlina, na czele właśnie z Wernerem.

Pojęcie M-ideału zostało wprowadzone przez Alfsena i Effrosa w pracy [3] w doskonale umotywowanym celu: zunifikowania – na tyle, na ile to możliwe – teorii strukturalnych dla C^*-algebr, krat Banacha, czy też preduali przestrzeni L_1. Co znaczące, M-ideały, jako „cegiełki" służące do budowy tego typu przestrzeni, zostały zdefiniowane wyłącznie przy użyciu normy – a więc geometrii przestrzeni – bez angażowania żadnej dodatkowej algebraicznej lub porządkowej struktury. Definicja M-ideału stanowi niejako złagodzenie żądania komplementarności. Przestrzeń domkniętą $Y \subset X$ nazywamy bowiem M-ideałem przestrzeni Banacha X, jeżeli dual X^* jest ℓ_1-sumą prostą $Y^\perp \oplus_1 Z$ anihilatora $Y^\perp$ przestrzeni Y oraz pewnej domkniętej swojej podprzestrzeni Z. Łatwo widać, że c_0 jest M-ideałem przestrzeni ℓ_∞, mimo że, jak wiadomo z klasycznego twierdzenia Phillipsa i Sobczyka, c_0 (a nawet żadna jej kopia) nie jest komplementarna w ℓ_∞. Aby w pełni docenić geometryczną naturę pojęcia M-ideału, przytoczmy charakteryzację uzyskaną przez Alfsena i Effrosa. Mianowicie domknięta podprzestrzeń Y przestrzeni Banacha X jest M-ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ ma ona następującą własność, zwaną *n-ball property*: jeżeli $V_1, \ldots, V_n$ są kulami otwartymi w X, $\bigcap_{i=1}^n V_i \neq \emptyset$ oraz $V_i \cap Y \neq \emptyset$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$, to przestrzeń Y zawiera pewien punkt zbioru $\bigcap_{i=1}^n V_i$. Aby warunek ten zachodził dla każdego $n \in \mathbb{N}$, wystarcza z kolei, że jest on spełniony dla $n = 3$.

Jacques Dixmier, francuski guru teorii algebr operatorów, udowodnił w 1951 r., że jeżeli $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta, to przestrzeń $\mathscr{K}(\mathcal{H})$ wszystkich zwartych operatorów na $\mathcal{H}$ jest M-ideałem w przestrzeni $\mathscr{B}(\mathcal{H})$ wszystkich ograniczonych operatorów na $\mathcal{H}$. Pytanie o to, kiedy $\mathscr{K}(X)$ jest M-ideałem w $\mathscr{B}(X)$ dla przestrzeni Banacha X, było tym, co mocno trapiło grupę berlińskich matematyków, ale również szereg innych znakomitych uczonych, jak chociażby Åsvald Lima i William B. Johnson. Uzyskano kilka częściowych odpowiedzi; wiadomo było na przykład, że warunkiem koniecznym na to, by przestrzeń $\mathscr{K}(X)$ była M-ideałem w $\mathscr{B}(X)$ jest to, aby X^* miała własność Radona–Nikodýma, jak i to, aby X miała pewną metryczną własność aproksymacji (*metric compact approximation property*), pozwalającą punktowo przybliżać operator identycznościowy uogólnionym ciągiem operatorów zwartych o normach niewiększych od 1. Dokładniejsze omówienie historii tego problemu można znaleźć w [25].

Twierdzenie, które Nigel Kalton przesłał Dirkowi Wernerowi (zob. [9]), niemal kompletnie zamknęło problem M-ideału dla przestrzeni $\mathscr{K}(X)$ i pokazało, czego dokładnie brakuje do odwrócenia zacytowanej wyżej implikacji. Otóż na to, aby przestrzeń $\mathscr{K}(X)$ była M-ideałem w $\mathscr{B}(X)$ potrzeba i wystarcza, aby spełnione były następujące warunki:

(i) przestrzeń X nie zawiera izomorficznej kopii ℓ_1;
(ii) jeżeli $(x_t)_{t\in T}$ jest ograniczonym ciągiem uogólnionym elementów przestrzeni X, to dla dowolnych $x, y \in X$, spełniających $\|x\| = \|y\|$, mamy $\limsup_{t\in T} \|x_t + x\| = \limsup_{t\in T} \|x_t + y\|$;
(iii) istnieje ciąg uogólniony $(K_t)_{t\in T}$ elementów $\mathscr{K}(X)$, spełniający $K_t(x) \to x$ dla każdego $x \in X$ oraz $\limsup_{t\in T} \|I_X - 2K_t\| \leqslant 1$.

Ten wynik zapoczątkował owocną współpracę Nigela Kaltona ze środowiskiem berlińskim. Współpracę, którą sam Werner opisuje w obrazowy i niezwykle szczery sposób: *I felt like a pedestrian next to a racing car.* Wspomniany już Peter Casazza powiedział zaś, że Nigel Kalton nie tylko rozwiązywał problemy, z którymi świetni matematycy nie radzili sobie przez lata – był czasem w stanie znaleźć trzy różne rozwiązania tylko dlatego, że pierwsze dwa mu się nie podobały.

W 2004 r. Nigel Kalton został uhonorowany jedną z najbardziej prestiżowych międzynarodowych nagród matematycznych, a najbardziej prestiżową w samej analizie funkcjonalnej – Medalem Banacha, ustanowionym przez Prezydium Polskiej Akademii Nauk w 1992 r. w stulecie urodzin Stefana Banacha. W dotychczasowej historii odznaczenie to zostało nadane siedemnastu laureatom, z których większość to matematycy, pracujący właśnie w zakresie teorii przestrzeni Banacha. Jest to niezwykle doborowe grono; warto nadmienić, że tegorocznym laureatem został sam William Timothy Gowers – zdobywca Medalu Fieldsa w 1998 r. za dokonania w dziedzinie zastosowań kombinatoryki do teorii przestrzeni Banacha.

Nigel Kalton jest (współ)autorem ponad 270 artykułów naukowych oraz sześciu książek: [18], [20], [13], [14], [21] i [1] (w kolejności chronologicznej). Swoje artykuły publikował w najbardziej cenionych na świecie czasopismach: 23 prace w *Studia Mathematica*, po 13 prac w *Proceedings of the American Mathematical Society* oraz *Transactions of the American Mathematical Society*, 12 prac w *Israel Journal of Mathematics.*

Wśród wymienionych monografii znajdują się tak doskonałe pozycje, jak [1], [14], [18]. Napisana wspólnie z Newtonem T. Peckiem i Jamesem W. Robertsem książka [18] zawiera omówienie szeregu klasycznych zagadnień, typowych w kategorii przestrzeni Banacha (a więc lokalnie wypukłych i lokalnie ograniczonych F-przestrzeni), w odniesieniu do niekoniecznie lokalnie wypukłych F-przestrzeni. Sztandarowym przykładem i jedną z głównych motywacji są tutaj przestrzenie $L_p(\mu)$ dla $0 \leqslant p < 1$ oraz przestrzenie Hardy'ego H_p funkcji analitycznych f na otwartym kole jednostkowym, dla których

$$\|f\|_p = \sup_{0\leqslant r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$

Dla $0 < p < 1$ topologia zadana na H_p przez p-podaddytywną quasi-normę $\|\cdot\|_p$ nie jest lokalnie wypukła (ale lokalnie ograniczona i metryzowalna w sposób zupełny), mimo że H_p^* rozdziela punkty. Dla tego typu przestrzeni rozważa się takie kwestie, jak: problem przedłużania w sensie Hahna–Banacha, injektywne/projektywne własności ciągów dokładnych – w szczególności twierdzenia o podniesieniu (*lifting theorems*), istnienie wypukłych i zwartych zbiorów bez punktów ekstremalnych.

Monografia [14] dotyczy opisu i warunków na jednoznaczność struktury kratowej w ośrodkowych przestrzeniach Banacha. Jednym z podstawowych pytań jest tutaj to, kiedy dwie izomorficzne przestrzenie Banacha, posiadające jednocześnie strukturę kraty Banacha, są izomorficzne w sensie porządkowym. Wiele wyników zawartych w [14] to nieatomowe, czy też ciągłe, odpowiedniki klasycznych rezultatów tyczących problemu komplementarności dla przestrzeni z bazą (najczęściej symetryczną i bezwarunkową). Wynika to np. stąd, że ośrodkowa i atomowa krata Banacha, z porządkowo ciągłą normą (tzn. każdy porządkowo ograniczony ciąg rosnący jest zbieżny według normy) to nic innego, jak przestrzeń Banacha z bezwarunkową bazą Schaudera. Twierdzenie Lindenstraussa i Zippina [22] mówi, że istnieją tylko trzy (modulo izomorfizm) przestrzenie Banacha posiadające dokładnie jedną (z dokładnością do równoważności; zob. [1, §1.3]) znormalizowaną bazę bezwarunkową: ℓ_2, ℓ_1, c_0. Gdyby w rozumieniu pojęcia baz równoważnych dopuścić także dowolne ich permutacje, przestrzeniami dopuszczającymi jedyną bazę bezwarunkową byłyby również: $\ell_2 \oplus \ell_1$, $\ell_2 \oplus c_0$, $\ell_1 \oplus c_0$ oraz $\ell_2 \oplus \ell_1 \oplus c_0$, co pokazali Edelstein i Wojtaszczyk [7]. Oba te wyniki można wysłowić, mówiąc, że wymienione przestrzenie dopuszczają dokładnie jedną czysto atomową strukturę porządkowo ciągłej kraty Banacha. Problem charakteryzacji takich przestrzeni, np. w klasie komplementarnych podprzestrzeni $(\ell_2 \oplus \ell_2 \oplus \ldots)_{c_0}$ czy też $(\ell_1 \oplus \ell_1 \oplus \ldots)_{c_0}$, był atakowany w pracy [6], gdzie wskazano przy okazji nowe przykłady takie jak $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n)_{c_0}$ oraz $\ell_2 \oplus (\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \ell_2^n)_{c_0}$. Omówienie historii tej problematyki można znaleźć w [24]. W monografii [14] badane są analogiczne własności dla krat Banacha o strukturze niekoniecznie czysto atomowej. Program ten został zainicjowany przez Johnsona, Maureya, Schechtmana i Tzafririego [8], którzy skupili się na pewnej specjalnej klasie przestrzeni funkcyjnych – *rearrangement invariant*, które są ciągłym odpowiednikiem przestrzeni z bazą symetryczną (zob. też [24, Definition 5.1]).

Ostatnia książka Nigela Kaltona [1], współautorstwa Fernando Albiaca, jest pięknym wykładem metod i idei nowoczesnej teorii przestrzeni Banacha. Precyzyjnie i szeroko jest tam opisana teoria baz i ciągów bazowych, ze szczególnym naciskiem na zastosowania oferowanych przez tę teorię technik do badania izomorficznych struktur klasycznych przestrzeni Banacha jak c_0, ℓ_p, $C(K)$, $L_p(\mu)$, a także przestrzeni $\mathcal{M}(K)$ regularnych miar borelowskich, czy też quasi-refleksywnej przestrzeni Jamesa $\mathcal{J}$. Poruszane są też zagadnienia faktoryzacji operatorów oraz teorii Grothendiecka operatorów absolutnie sumujących (*absolutely summing*), oczywiście z prawdziwie magiczną nierównością Grothendiecka w tle. Znajdziemy również w [1] przykłady głębokich zastosowań kombinatorycznych twierdzeń typu Ramseya, a szczególnie klasycznego wyniku Galvina i Prikry'ego o tym, że borelowskie (względem topologii Ellentucka) podzbiory $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ są całkowicie ramseyowskie (*completely Ramsey*). Metody te użyte są m.in. do dowodu słynnego „ℓ_1-twierdzenia" Rosenthala. Zaprezentowana jest także konstrukcja przestrzeni Tsirelsona (tak naprawdę – konstrukcja przestrzeni do niej dualnej według metody Figiela i Johnsona), tj. refleksywnej przestrzeni Banacha, z bazą bezwarunkową, która nie zawiera izomorficznej kopii żadnej z przestrzeni ℓ_p (dla $1 \leqslant p < \infty$) lub c_0, i która w ten sposób brutalnie burzy wszelkie marzenia o prostej i przejrzystej strukturalnej teorii przestrzeni Banacha. Monografia porusza też trudne zagadnienia związane z geometrią przestrzeni Banacha, w szczególności – twierdzenie mówiące, że funkcje spełniające warunek Lipschitza na sferze $\mathcal{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ są coraz bliższe funkcji stałej, gdy $n \to \infty$ (*concentration of measure phenomenon*). Jego konsekwencją jest zaskakujące twierdzenie Dvoretzky'ego z 1960 r. o tym, że skończenie wymiarowe przestrzenie typu ℓ_2^k są bliskie w sensie odległości Banacha–Mazura skończenie wymiarowym podprzestrzeniom dowolnej przestrzeni unormowanej. Uwieńczeniem tych rozważań jest dowód głębokiego twierdzenia Lindenstraussa i Tzafririego z 1971 r., które pozytywnie rozwiązuje otwarty już od czasów Banacha problem: jeżeli każda domknięta podprzestrzeń przestrzeni Banacha X jest komplementarna, to X jest izomorficzna z przestrzenią Hilberta.

Omówimy poniżej kilka przykładów pięknych rezultatów uzyskanych przez Nigela Kaltona, których wybór jest czysto subiektywny. Prezentują one jedynie drobną część jego naukowego dorobku, ale nie będzie przesadą stwierdzenie, że nawet gdyby w trakcie całej swej naukowej kariery nie udowodnił żadnego twierdzenia, poza tymi wymienionymi, i tak miałby pewne miejsce w historii analizy funkcjonalnej.

Rozpoczniemy od wyniku uzyskanego wspólnie z Grahamem Bennettem w pracy [4], który rzuca światło i uzupełnia zaskakujące twierdzenie udowodnione w 1968 r. przez Seevera. Niech Σ będzie σ-algebrą podzbiorów pewnego zbioru, a $B(\Sigma)$ niech oznacza przestrzeń Banacha wszystkich rzeczywistych Σ-mierzalnych funkcji ograniczonych. Jak wykazał Seever, dla dowolnej przestrzeni Banacha X zachodzi implikacja: jeżeli obraz ograniczonego operatora liniowego $T\colon X \to B(\Sigma)$ zawiera zbiór $\{\chi_A : A \in \Sigma\}$ funkcji charakterystycznych wszystkich zbiorów z Σ, to T jest operatorem surjektywnym. W istocie oznacza to domkniętość obrazu operatora T. Pozornie nie ma żadnego powodu, aby tak właśnie było. Sytuacja ta wynika więc z jakiejś specjalnej własności przestrzeni funkcji prostych w $B(\Sigma)$. Twierdzenie Bennetta–Kaltona odkrywa tę tajemnicę.

Gęstą podprzestrzeń Y_0 przestrzeni Banacha Y nazywamy *surjektywną*, jeżeli dla dowolnej przestrzeni Banacha X i każdego ograniczonego operatora liniowego $T\colon X \to Y$, spełniającego $Y_0 \subset T(X)$, mamy $T(X) = Y$. Jak wykazano w [4], podprzestrzeń Y_0 jest surjektywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest przestrzenią beczkową (*barrelled*), tzn. jest lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo-topologiczną, w której każdy domknięty, zbalansowany, pochłaniający i wypukły zbiór zawiera otoczenie zera. Jest to kompletna i prosta charakteryzacja. Dowód warunku wystarczającego wykorzystuje twierdzenie o domkniętym wykresie w wersji dla przestrzeni beczkowych, natomiast dowód konieczności – twierdzenie Mahowalda o tym, że spełnienie tezy twierdzenia o domkniętym wykresie dla każdego operatora liniowego $Y_0 \to Z$, i każdej przestrzeni Banacha Z, implikuje, że przestrzeń Y_0 jest beczkowa. Zgodnie z wynikiem Seevera, podprzestrzeń ℓ_∞^0 przestrzeni ℓ_∞, złożona z wszystkich ciągów przyjmujących skończenie wiele wartości, jest więc przestrzenią beczkową. Warto zauważyć, że jest ona jednak pierwszej kategorii w ℓ_∞.

Następny ważny wynik, uzyskany przez Nigela Kaltona w pracy [10], jest głębokim analogonem klasycznego twierdzenia Banacha–Mazura o uniwersalności przestrzeni $C[0,1]$ w klasie ośrodkowych przestrzeni Banacha. Mówi on, że istnieje ośrodkowa F-przestrzeń $\mathfrak{X}$ uniwersalna dla wszystkich ośrodkowych F-przestrzeni, tj. zawierająca domkniętą, izomorficzną kopię każdej takiej przestrzeni. Metryka w danej F-przestrzeni X pozwala oczywiście zdefiniować F-normę $\|\cdot\|$, która spełnia wszystkie aksjomaty normy poza jednorodnością, zamiast której mamy tylko parzystość oraz ciągłość odwzorowania $\mathbb{R} \times X \ni (t,x) \mapsto \|tx\|$. Okazuje się, że brak jednorodności drastycznie utrudnia problem w stosunku do sytuacji, jaką mamy w twierdzeniu Banacha–Mazura.

Konstrukcja przestrzeni $\mathfrak{X}$ jest niezwykle wysublimowana. Jednym z kluczowych pomysłów jest rozważenie klasy *βF^*-przestrzeni*, tj. klasy przestrzeni X z F-normą $\|\cdot\|$ spełniającą warunek

$$\inf_{\substack{x\in X,\\ x\neq 0}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|tx\| > 0.$$

Z jednej strony jest ich wystarczająco dużo, bowiem dla każdej ośrodkowej F-przestrzeni X suma $X \oplus \ell_2$ zawiera pewną gęstą podprzestrzeń typu βF^*, a z drugiej – są one na tyle porządne, że można skonstruować metryzowalną przestrzeń liniowo-topologiczną Z, o przeliczalnym wymiarze, która jest uniwersalna dla wszystkich βF^*-przestrzeni o przeliczalnym wymiarze. Ta najtrudniejsza część dowodu opiera się na modyfikacji metody Pełczyńskiego (*packing technique*), pozwalającej zbudować przestrzeń uniwersalną w postaci przestrzeni funkcji określonych na pewnym zbiorze F-norm uporządkowanych w strukturę drzewa. Przestrzeń $\mathfrak{X}$ definiowana jest na koniec jako uzupełnienie przestrzeni Z.

Kolejne znaczące osiągnięcie Nigela Kaltona związane jest z tzw. problemem trzech przestrzeni, który można ogólnie wysłowić następująco: załóżmy, że $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ jest ciągiem dokładnym F-przestrzeni (tj. X zawiera taką domkniętą podprzestrzeń $Y_1 \simeq Y$, że $X/Y_1 \simeq Z$) oraz że przestrzenie X, Y mają pewną własność (P); czy wówczas przestrzeń Z również musi mieć własność (P)? Pytanie to stało się jednym z centralnych pytań w analizie funkcjonalnej, kiedy w 1975 r. Enflo, Lindenstrauss i Pisier wykazali, że odpowiedź jest negatywna, gdy własność (P) jest własnością bycia izomorficzną kopią pewnej przestrzeni Hilberta. Jeszcze większy przełom nastąpił jednak po opublikowaniu dwóch prac: [11] i [17]. Głównie polegał on na zauważeniu głębokiego związku między własnościami ciągów dokładnych a tzw. *operatorami quasi-liniowymi*, tj. jednorodnymi operatorami $f\colon X \to Y$ spełniającymi warunek

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant M(\|x\| + \|y\|)$$

dla $x, y \in X$, z pewną stałą $M < \infty$. Jak się okazało, istnieje naturalna metoda generowania ciągów dokładnych przez operatory quasi-liniowe, ale i na odwrót – każdemu takiemu ciągowi odpowiada pewien operator quasi-liniowy. Co więcej, rozszczepialność ciągu dokładnego (równoważnie: komplementarność podprzestrzeni $Y_1 \subset Z$, a zatem przedstawienie $Z \simeq Y \oplus X$) jest równoważna temu, że generujący go operator quasi-liniowy f leży blisko pewnego operatora liniowego (niekoniecznie ciągłego) $h\colon X \to Y$ w tym sensie, że $\|f(x) - h(x)\| \leqslant C\|x\|$ dla $x \in X$ i pewnej stałej $C < \infty$. Mówiąc globalnie: dla ustalonych F-przestrzeni X i Y ciąg dokładny $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ rozszczepia się dla każdej F-przestrzeni Z (mówimy wtedy, że para (X, Y) *rozszczepia się*) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi stabilność dla operatorów quasi-liniowych odwzorowujących X w Y, tj. każdy jest bliski w powyższym sensie jakiemuś operatorowi liniowemu. Kalton i Peck [17] nie tylko wzmocnili przykład uzyskany przez Enflo, Lindenstraussa i Pisiera, pokazując, że dla żadnego $0 < p < \infty$ para

(ℓ_p, ℓ_p) nie rozszczepia się, ale też pokazali, że sposób, w jaki ten przykład skonstruowano był niejako jedynym możliwym – musiał pochodzić od nietrywialnego operatora quasi-liniowego.

Rozszczepialność pary $(X, \mathbb{R})$ definiuje X jako tzw. *K-przestrzeń*. Inaczej mówiąc, X jest K-przestrzenią, jeżeli nie da się jej przedstawić w postaci ilorazu $Z/\mathbb{R}$ z pewną F-przestrzenią Z, która nie jest lokalnie wypukła. Stosując maszynerię operatorów quasi-liniowych można dość łatwo przekonać się, że pytanie o to, czy przestrzenie c_0 i ℓ_∞ są K-przestrzeniami, prowadzi do naturalnego pytania o stabilność dla skończenie addytywnych funkcji zbioru. Problem ten został postawiony przez Nigela Kaltona w [12], który niedługo potem znalazł rozwiązanie wspólnie z Jamesem Robertsem [19], wykazując następujące twierdzenie: istnieje taka stała $K < 45$, że dla dowolnej algebry zbiorów $\mathscr{F}$ i dowolnej funkcji $\nu\colon \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, spełniającej dla rozłącznych $A, B \in \mathscr{F}$ nierówność

$$|\nu(A \cup B) - \nu(A) - \nu(B)| \leqslant 1,$$

istnieje taka addytywna funkcja zbioru $\mu\colon \mathscr{F} \to \mathbb{R}$, że $|\nu(A) - \mu(A)| \leqslant K$ dla $A \in \mathscr{F}$. Choć twierdzenie to może wydawać się niewinne, jego dowód jest prawdziwym majstersztykiem. Kalton i Roberts wykorzystują w nim m.in. twierdzenie Kelleya o istnieniu pewnych miar na algebrach Boole'a, pojęcie indeksu pokryciowego, lemat Halla o małżeństwach, metodę probabilistyczną dowodzenia istnienia obiektów kombinatorycznych, pojęcie koncentratora (specjalny graf dwudzielny), a także pewne twierdzenie z programowania liniowego. Do dziś nie wiadomo, jaka jest optymalna wartość stałej K.

Na koniec wspomnijmy o niezwykle eleganckiej charakteryzacji rzeczywistych algebr typu $C(K)$, którą Nigel Kalton uzyskał z Fernando Albiakiem w [2]. Jeżeli mianowicie $\mathscr{A}$ jest rzeczywistą algebrą Banacha z jednością e, dla której $\|e\| = 1$, to $\mathscr{A}$ jest izometrycznie izomorficzna z rzeczywistą algebrą $C(K)$ dla pewnej zwartej przestrzeni Hausdorffa K wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszelkich $x, y \in \mathscr{A}$ zachodzi nierówność

$$\|x^2 - y^2\| \leqslant \|x^2 + y^2\|. \tag{2}$$

Wcześniej znane była charakteryzacja Arensa, w której zamiast (2) zakładano nierówność $\|x\|^2 \leqslant \|x^2 + y^2\|$. Można łatwo sprawdzić, że jest ona silniejszym warunkiem niż (2), więc twierdzenie Arensa staje się tu szczególnym przypadkiem. Co więcej, dowód Albiaca i Kaltona jest bardziej elementarny niż dowód Arensa, który wykorzystuje m.in. kompleksyfikację algebry. Z dowodu Albiaca i Kaltona można również odczytać następujący wniosek: jeżeli nierówność (2) zastąpimy słabszą nierównością $\|x^2\| \leqslant \|x^2 + y^2\|$ (oczywiście słabszą też niż nierówność Arensa), to algebra $\mathscr{A}$ będzie jedynie homeomorficznie izomorficzna z przestrzenią typu $C(K)$ i tezy tej nie da się poprawić.

Ładnym zastosowaniem powyższego wyniku jest to, że algebra Banacha ℓ_∞ (z mnożeniem punktowym) jest w istocie algebrą typu $C(K)$. To samo tyczy się, rzecz jasna, przestrzeni $L_\infty(\mu)$ dla dowolnej miary μ. W ten sposób można wprowadzić uzwarcenie Čecha–Stone'a $\beta\mathbb{N}$, bo właśnie dla tej (i tylko tej, z dokładnością do homeomorfizmu) przestrzeni topologicznej mamy izometryczny izomorfizm $\ell_\infty \simeq C(\beta\mathbb{N})$.

Gian-Carlo Rota w swoim artykule [23] twierdził, że każdy, nawet najlepszy, matematyk ma w swoim repertuarze tylko kilka istotnych trików, które z mniejszym lub większym powodzeniem, stosuje przez całe życie. Przyznał też, że dogłębnie studiując prace samego Hilberta, doszedł do wniosku, że nawet on stosował tylko kilka trików! Jest to oczywiście temat na szerszą dyskusję, ale z pewnością Nigel Kalton byłby jednym z najbardziej obiecujących kandydatów na kontrprzykład dla tej tezy. Studiowanie jego prac, metod i pomysłów to prawdziwa intelektualna przygoda.

Nigel Kalton zmarł 31 sierpnia 2010 r. wskutek udaru mózgu. Nekrolog opublikowany przez brytyjski dziennik `The Times` zawiera następujące słowa:

> *As a mathematician, Professor Nigel Kalton inspired tremendous respect from his peers for the great depth and breadth of his mathematical output, his skill in problem-solving, his ferociously hard work — he was affectionately known as "the Bulldozer" — and his endearing personal qualities.*

[Literatura]

[1] F. Albiac, N.J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer 2006.

[2] F. Albiac, N.J. Kalton, *A characterization of real $C(K)$-spaces*, Amer. Math. Monthly 114 (2007), 737–743.

[3] E.M. Alfsen, E.G. Effros, *Structure in real Banach spaces*, Ann. of Math. 96 (1972), 98–173.

[4] G. Bennett, N.J. Kalton, *Inclusion theorems for K-spaces*, Canadian J. Math. 25 (1973), 511–524.

[5] B.C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, part 5, Springer-Verlag 1998.

[6] J. Bourgain, P.G. Casazza, J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Banach Spaces with a Unique Unconditional Basis, up to Permutation*, Memoirs Amer. Math. Soc. 322 (1985).

[7] I.S. Edelstein, P. Wojtaszczyk, *On projections and unconditional bases in direct sums of Banach spaces*, Studia Math. 56 (1976), 263–276.

[8] W.B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, L. Tzafriri, *Symmetric Structures in Banach Spaces*, Memoirs Amer. Math. Soc. 217 (1979).

[9] N.J. Kalton, *Spaces of compact operators*, Math. Ann. 208 (1974), 267–278.

[10] N.J. Kalton, *Universal spaces and universal bases in metric linear spaces*, Studia Math. 61 (1977), 161–191.

[11] N.J. Kalton, *The three space problem for locally bounded F-spaces*, Compositio Math. 37 (1978), 243–276.

[12] N.J. Kalton, Problem 5 (p. 284), Measure Theory and Its Applications (Proc. Conf., Northern Illinois Univ. 1980, G.A. Goldin and R.F. Wheeler (ed.)), DeKalb, Illinois 1981.

[13] N.J. Kalton, *Nonlinear Commutators in Interpolation Theory*, Memoirs Amer. Math. Soc. 73 (1988).

[14] N.J. Kalton, *Lattice Structures on Banach Spaces*, Memoirs Amer. Math. Soc. 103 (1993).

[15] N.J. Kalton, L.J. Lange, *Equimodular limit periodic continued fractions*. In: Analytic Theory of Continued Fractions, vol. 2, pages 159–219. W.J. Thron (ed.), Lecture Notes in Mathematics 1199, Springer-Verlag 1986.

[16] N.J. Kalton, C. Le Merdy, *Solution of a problem of Peller concerning similarity*, J. Operator Theory 47 (2002), 379–387.

[17] N.J. Kalton, N.T. Peck, *Twisted sums of sequence spaces and the three space problem*, Trans. Amer. Math. Soc. 255 (1979), 1–30.

[18] N.J. Kalton, N.T. Peck, J.W. Roberts, *An F-space sampler*, London Math. Soc. Lectures Note Series 89, Cambridge University Press 1984.

[19] N.J. Kalton, J.W. Roberts, *Uniformly exhaustive submeasures and nearly additive set functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 278 (1983), 803–816.

[20] N.J. Kalton, E. Saab, *Banach spaces*: Proceedings of the Missouri Conference held in Columbia, USA, June 24–29, 1984. Springer-Verlag 1985.

[21] N.J. Kalton, E. Saab, S. Montgomery-Smith, *Interaction Between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 175, Marcel Dekker, New York 1996.

[22] J. Lindenstrauss, M. Zippin, *Banach spaces with a unique unconditional basis*, J. Funct. Anal. 3 (1969), 115–125.

[23] G.-C. Rota, *Ten lessons I wish I had been taught*, Notices Amer. Math. Soc. 44 (1997), 22–25.

[24] L. Tzafriri, *Uniqueness of Structure in Banach Spaces*. In: Handbook of the geometry of Banach spaces, vol. 2, pages 1635–1669. North-Holland, Amsterdam 2003.

[25] D. Werner, *Nigel Kalton's work on isometrical Banach space theory*, arXiv: 1103.3153v1.

Tomasz Kochanek

Autor artykułu jest adiunktem w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, a także Opiekunem Koła Naukowego Matematyków UŚ.

[Problemy lokalnie otwarte]

Wraz z rozpoczęciem nowego roku akademickiego rozpoczęliśmy na łamach [Macierzatora] nowy cykl: problemy (lokalnie) otwarte. Pracownicy naukowi oraz doktoranci związani z Kołem proponują zmierzenie się z wybranymi przez nich zagadnieniami. W tym numerze zachęcamy do zastanowienia się nad zadaniem zaproponowanym przez Opiekuna KNM, doktora Tomasza Kochanka:

Niech Ω będzie dowolnym zbiorem, a $(\mathscr{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ – ciągiem algebr podzbiorów zbioru Ω, spełniającym $\mathscr{F}_n \subsetneq \mathscr{F}_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że istnieje taki ciąg $n_0 < n_1 < \ldots$ liczb naturalnych oraz taki ciąg $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ zbiorów parami rozłącznych, że $E_k \in \mathscr{F}_{n_k} \setminus \mathscr{F}_{n_{k-1}}$ (dla $k \in \mathbb{N}$).

Trudniejsze jest wykazanie, korzystając z powyższego zadania, że żadnej σ-algebry Σ podzbiorów zbioru Ω nie da się przedstawić w postaci sumy

$\Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$ *ściśle rosnącego ciągu* $(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ *pewnych* σ*-algebr podzbiorów zbioru* Ω.

Na maile (nie tylko od studentów!) czekamy pod adresem

`macierzator@knm.katowice.pl`.

——————— ⁂ ———————

Miesiąc temu zaproponowaliśmy zmierzenie się z problemem postawionym przez Tomka Kanię:

Uzasadnić, że dla każdej ośrodkowej przestrzeni Banacha E *istnieje różnowartościowy operator ograniczony* $T\colon E \to \mathsf{H}$, *gdzie* H *jest ośrodkową przestrzenią Hilberta. Czy gdy* $E = c_0$ *operator ten może mieć domknięty obraz? Co w przypadku* $E = \ell^1$*? Bądź dla* ℓ^π*?*

Dziękujemy serdecznie za wszystkie nadesłane rozwiązania. Poniżej prezentujemy jedno z nich; idea pozostałych była bardzo podobna.

Kluczowym składnikiem rozumowania jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1 (Banacha–Mazura)**.** *Dowolną ośrodkową przestrzeń Banacha* E *można zanurzyć izometrycznie w* $\mathcal{C}[0,1]$.

Przypuśćmy zatem, że $\iota\colon E \to \mathcal{C}[0,1]$ jest izometrycznym włożeniem naszej przestrzeni Banacha. Wystarczy teraz rozważyć $T := j \circ \iota$ gdzie

$$j\colon (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (L^2[0,1], \|\cdot\|_2).$$

jest odwzorowaniem inkluzji. Operator T jest injektywny jako złożenie operatorów injektywnych, oraz ciągły jako złożenie izometrii z odwzorowaniem ciągłym j (ciągłość j wynika z tego, że zbieżność jednostajna na $[0,1]$ pociąga zbieżność w $\|\cdot\|_2$ – istotne jest tutaj to, że $[0,1]$ jest miary skończonej). Gdyby obraz $T(E)$ był domknięty, to musiałby być przestrzenią Hilberta, jednak T jest ciągłym izomorfizmem liniowym między E oraz $T(E)$, zatem, wobec twierdzenia Banacha o izomorfizmie, oznaczałoby to, że T^{-1} jest również ciągły. Wtedy na E dałoby się wprowadzić taką normę $\|\cdot\|_0$ równoważną z $\|\cdot\|_E$, że $(E, \|\cdot\|_0)$ byłaby przestrzenią Hilberta. Zatem obraz $T(E)$ nie może być domknięty w podanych przypadkach. Podkreślmy jeszcze, że skonstruowana przestrzeń Hilberta jest uniwersalna dla dowolnej ośrodkowej przestrzeni Banacha E w sposób naturalny[1] – jest to po prostu znana przestrzeń $L^2[0,1]$ o której wiadomo, że jest ośrodkowa.

Adam Wegert

[1] nigdzie nie odwołujemy się do tego jak wygląda E – jest to ukryte w przytoczonym twierdzeniu!

[Zastosowania twierdzenia o zbiorach prawie skończonych]

W ostatnim numerze Macierzatora został przedstawiony dowód twierdzenia autorstwa Pawła Zwoleńskiego o zbiorach prawie skończonych. W niniejszym artykule przedstawimy pewne zastosowania tego twierdzenia w analizie funkcjonalnej. Zaczniemy od przypomnienia definicji zbioru prawie skończonego oraz wypowiedzi wyżej wymienionego twierdzenia.

Zbiór A nazywamy *prawie skończonym* w przestrzeni metrycznej X, jeżeli A jest zbiorem nieskończonym i dowolna kula w X zawiera tylko skończoną ilość jego elementów.

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że A jest zbiorem prawie skończonym w przestrzeni Hilberta X. Istnieje wówczas taki zbiór Y gęsty w X, że dla dowolnego $y \in Y$ i dowolnej liczby naturalnej N istnieje kula o środku w punkcie y, która zawiera dokładnie N elementów zbioru A.*

Zastosujmy teraz powyższe twierdzenie do rozwiązania klasycznej wersji zadania Steinhausa o puktach kratowych (zob. [4, 6]).

Wniosek 1. *Dla każdego $N \in \mathbb{N}$ istnieje na płaszczyźnie koło zawierające dokładnie N punktów kratowych.*

Dowód. Jeżeli $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ i $r > 0$, to istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że

$$K\big((x, y), r\big) \subset K\big((x, y), n\big).$$

Zauważmy, że koło $K((x, y), n)$ zawiera mniej niż $4n^2$ punktów kratowych. Wynika stąd, ze zbiór punktów kratowych jest prawie skończony na płaszczyźnie. Z twierdzenia 1 otrzymujemy tezę. □

Powyższy wynik łatwo przenosi się na wyższe wymiary.

Kolejne wnioski z twierdzenia 1 to fakt, że pewne przestrzenie unormowane nie są przestrzeniami unitarnymi.

Wniosek 2. *Załóżmy, że n jest liczbą naturalną większą od 1. Wówczas przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z normą $\|x\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, gdzie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nie jest przestrzenią unitarną.*

Dowód. Zbiór A punktów kratowych jest prawie skończony w $\mathbb{R}^n$. Rozważmy dowolną kulę $K(x, r)$, gdzie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Wówczas $K(x, r)$ jest kostką n-wymiarową $\prod_{i=1}^{n}(x_i - r, x_i + r)$. Jeżeli oznaczymy przez k moc zbioru $A \cap K$, to k jest postaci

$$m^l (m-1)^{n-l}, \tag{1}$$

dla pewnych liczb naturalnych m i l ($1 \leqslant l \leqslant n$), co wynika z faktu, że przedział $(x_i - r, x_i + r)$ zawiera $m-1$ lub m liczb całkowitych dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ w zależności od położenia punktu x_i na prostej euklidesowej. Jest to sprzeczne z tezą twierdzenia 1, gdyż żadna kula w przestrzeni nie zawiera p punktów kratowych, gdzie p jest dowolną liczbą pierwszą różną od 2 (takie p nigdy nie jest postaci (1)). Ponieważ $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią zupełną, więc nie istnieje iloczyn skalarny generujący normę $\|x\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. □

Wniosek 3. *Przestrzeń $C([0,1])$ funkcji ciągłych określonych na przedziale $[0,1]$ z normą $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ nie jest przestrzenią unitarną.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że przestrzeń $C([0,1])$ jest przestrzenią Hilberta. Wówczas przestrzeń

$$Y = \{ax + b\colon a, b \in \mathbb{R}\},$$

jest przestrzenią Hilberta, jako domknięta podprzestrzeń przestrzeni $C([0,1])$. Rozważmy zbiór

$$A = \{ax + b\colon a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Oczywiście zbiór A jest prawie skończony w Y. Zauważmy, że dowolna funkcja f ze zbioru A jest jednoznacznie określona przez ustalenie całkowitych wartości $f(0), f(1)$. Jeżeli $K(g,r)$ jest dowolną kulą w Y, to przedziały $(g(0) - r, g(0) + r)$, $(g(1) - r, g(1) + r)$ zawierają k lub $k + 1$ liczb całkowitych dla pewnej liczby naturalnej k. Oznacza to, że jeżeli funkcja f ma przyjmować w punktach 0 i 1 wartości całkowite, to f można wybrać na k^2 lub $k(k+1)$ sposobów. Zauważmy, że tak wybrane elementy zbioru A należą również do $K(g,r)$. Stąd dowolna kula w przestrzeni Y zawiera k^2 lub $k(k+1)$ punktów zbioru A dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ żadna liczba pierwsza $p > 2$ nie jest kwadratem liczby naturalnej ani iloczynem kolejnych dwóch liczb naturalnych, więc nie istnieją kule w Y zawierające p punktów zbioru A. Jest to sprzeczne z twierdzeniem 1. Jedynym założeniem, które nie może być spełnione, to istnienie iloczynu skalarnego generującego normę, co dowodzi, że przestrzeń $C([0,1])$ nie jest unitarna. □

Kolejny wniosek pokazuje, że twierdzenie 1 można zastosować również do udowodnienia niezupełności przestrzeni unitarnej c_{00} wszystkich ciągów rzeczywistych, których prawie wszystkie wyrazy są równe zeru (przestrzeń tę rozważamy z normą będącą restrykcją normy z przestrzeni ℓ_2).

Wniosek 4. *Przestrzeń c_{00} jest niezupełną przestrzenią unitarną.*

Dowód. Niech $\{e_n \in c_{00}\colon n \in \mathbb{N}\}$ będzie bazą kanoniczną przestrzeni c_{00}, tzn. e_n jest ciągiem, którego n–tym wyrazem jest 1, zaś pozostałe są zerami.

Jak łatwo sprawdzić, wówczas zbiór

$$A = \{ne_n \in c_{00} \colon n \in \mathbb{Z}\}$$

jest zbiorem prawie skończonym. Niech dalej

$$A_n = \{x \in c_{00} \colon \|x + ne_n\| = \|x - ne_n\|\}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Jak łatwo zauważyć, zbiór A_n jest zbiorem tych ciągów z przestrzeni c_{00}, których n–tym wyrazem jest zero. Wtedy oczywiście

$$c_{00} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Weźmy teraz $x_0 \in c_{00}$. Z powyższej równości wynika, że $x_0 \in A_{n_0}$ dla pewnej liczby naturalnej n_0. Biorąc

$$N = \operatorname{card}\big(K(x_0, \|x_0 + n_0 e_{n_0}\|) \cap A\big),$$

widzimy, że nie istnieje kula o środku w punkcie x_0, do której należy dokładnie $N + 1$ punktów zbioru A. Istotnie, jeśli $R \leqslant \|x_0 + n_0 e_{n_0}\|$, to kula $K(x_0, R)$ zawiera co najwyżej N punktów zbioru A, jeśli natomiast $R > \|x_0 + n_0 e_{n_0}\|$, to owa kula zawiera co najmniej $N + 2$ punkty zbioru A. Pokazuje to, że dla tej przestrzeni nie zachodzi teza twierdzenia 1, zatem nie może ona być zupełna. □

Powyższy przykład dowodzi również, że założenie zupełności w twierdzeniu 1 jest istotne. Okazuje się jednak, że w przestrzeniach unitarnych zachodzi następujący, słabszy analogon tego twierdzenia:

Twierdzenie 2. *Niech A będzie zbiorem prawie skończonym w przestrzeni unitarnej U. Wówczas dla każdej liczby naturalnej N istnieje kula zawierająca dokładnie N punktów zbioru A.*

Dowód. Niech X będzie taką przestrzenią Hilberta, że U jest jej gęstą podprzestrzenią.

Ustalmy liczbę naturalną N. Na mocy twierdzenia 1 istnieją punkt $x_0 \in X$ oraz $R_0 > 0$ o tej własności, że

$$\operatorname{card}\big(K_X(x_0, R_0) \cap A\big) = N,$$

gdzie przez $K_X(x_0, R_0)$ oznaczyliśmy kulę o środku x_0 i promieniu R_0 w przestrzeni X (kule w przestrzeni U oznaczać będziemy przez K_U). Zdefiniujmy liczbę dodatnią ε jako

$$\varepsilon = R_0 - \max\{\|x_0 - y\| \colon y \in K_X(x_0, R_0) \cap A\}.$$

Innymi słowy, ε jest odległością punktów zbioru A zawartych w $K_X(x_0, R_0)$ od brzegu tej kuli. Z gęstości zbioru U w przestrzeni X wynika, że

$$K_X\big(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\big) \cap U \neq \varnothing.$$

Weźmy $x \in K_X(x_0, \frac{\varepsilon}{2}) \cap U$ oraz $R = R_0 - \frac{\varepsilon}{2}$. Pokażemy, że

$$K_U(x, R) \cap A = K_X(x_0, R_0) \cap A,$$

co zakończy dowód.

Inkluzja „$\subset$" wynika z inkluzji $K_U(x, R) \subset K_X(x_0, R_0)$. Dla dowodu inkluzji przeciwnej ustalmy $y \in K_X(x_0, R_0) \cap A$. Wówczas

$$\begin{aligned} \|x-y\| &\leqslant \|x-x_0\| + \|x_0-y\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \max\{\|x_0-z\| \colon z \in K_X(x_0,R_0)\cap A\} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + R_0 - \varepsilon = R_0 - \frac{\varepsilon}{2} = R, \end{aligned}$$

co oznacza, że $y \in K_U(x, R) \cap A$. □

Na zakończenie zachęcamy Czytelników do poszukiwania dalszych przykładów oraz do przenoszenia innych zadań Steinhausa na ogólniejsze przestrzenie, o ile jest to możliwe.

[Literatura]

[1] H. T. Croft: *Three lattice-point problems of Steinhaus*, The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 33 (1982), no. 1, pp. 71-83.

[2] S. Jackson, R. D. Mauldin: *On a lattice problem of H. Steinhaus*, Journal of American Mathematical Society, vol. 15 (2002), no. 4, pp. 817-856.

[3] J. Musielak: *Wstęp do analizy funkcjonalnej,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1976.

[4] E. Piegat: *Zadania Hugona Steinhausa – znane i nieznane,* Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005.

[5] W. Rudin: *Analiza funkcjonalna,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.

[6] H. Steinhaus: *One hundred problems in elementary mathematics*, Dover Publications, 1965.

[7] P. Zwoleński: *Some generalization of Steinhaus' lattice points problem*, Colloquium Mathematicum, vol. 123 (2011), no. 1, pp. 129-132.

[8] P. Zwoleński: *Twierdzenie Baire'a i jego zastosowania*, praca dyplomowa licencjacka, Politechnika Śląska, Gliwice 2010 (do wglądu w bibliotece Instytutu Matematyki Politechniki Śląskiej).

Szymon Draga (`szymon.draga@gmail.com`)
Paweł Zwoleński (`pawel.zwolenski@gmail.com`)

[Short Track Master's Programme]

Prawdziwy mężczyzna, wobec popularnego porzekadła, powinien zrobić w życiu trzy rzeczy – posadzić drzewo, zbudować dom, spłodzić syna. Prawdziwy student powinien również zrobić trzy rzeczy. O dwóch z nich nie powinniśmy pisać na łamach uczelnianego czasopisma, zresztą nie są to rzeczy z których na starość jest się dumnym; trzecią rzeczą jest natomiast wyjazd na stypendium zagraniczne. Nie czarujmy się, w dzisiejszych czasach uczestnictwo w programach pokroju Erasmusa to już powoli standard. I dobrze wygląda na CV, i jest wspaniałym doświadczeniem, i rozwija umiejętności językowe, i ogólnie ma same zalety. No dobrze, ale czy są jakieś alternatywy do Erasmusa? A bo to nie pasuje nam kraj, a bo to słyszeliśmy jakieś niefortunne plotki, a może po prostu nie dostaliśmy się czy też procedura rekrutacyjna już zakończona. Jakie alternatywy ma USiowy student matematyki?

Hm, może dość niefortunnie rozpocząłem artykuł, mający poniekąd reklamować jedną stypendialną opcję, bo brzmi to, jakby była ona tylko „alternatywą". Proszę więc Szanownych Czytelników o zapomnienie na chwilę o pierwszym paragrafie, który miał być jeno wstępem, i przystąpienie do lektury następnego ze świeżym umysłem. Najlepiej pomyśleć przez pół minuty o niedźwiedziach polarnych. Gotowi? To zaczynamy

Obecnie przebywam w Holandii, na Vrije Universiteit w Amsterdamie, w ramach Short Track Master's Programme i pomyślałem, że warto by się podzielić paroma wrażeniami i – kto wie – może przekonać kogoś, kto się waha, że pojechać warto, i poinformować kogoś, kto o tym programie nie wie, że ów istnieje i jest strasznie fajny. To przystąpmy do opisywania fajności, łiii!

Przede wszystkim, STMP to program dla studentów na swym finalnym roku studiów magisterskich. Ten to rok studenci spędzają w Holandii na VU, wybierają tam promotora (poza tym, którego, miejmy nadzieję, mają w Katowicach w Uniwersytecie Śląskim ;)) i piszą pracę magisterską w języku angielskim, po to, by, po obronieniu jej w obydwu krajach, dostać dyplomy magistra z obydwu uczelni (!). Jest to zdecydowana różnica na plus w stosunku do innych programów stypendialnych, w których coś takiego jest zdecydowaną rzadkością.

Oczywiście, sporym problemem przy takim wyjeździe za granicę jest nawał nowych wrażeń – przyjeżdżamy do obcego kraju (!), wysiadamy w jakimś nieznanym nam miejscu (!!), w którym wszyscy mówią w jakimś dziwnym języku (!!!), mamy w ręce mega ciężką torbę, a akademik jest niewiadomogdzie, uczelnia to już w ogóle, a trzeba załatwić trzy miliardy rzeczy. Tutaj VU naprawdę pokazuje klasę, organizując tydzień tak zwanych Arrival Daysów. Począwszy od usługi odebrania studentów z lotniska (przez innych studentów), poprzez zebranie wszystkich potrzebnych oficjeli na uczelni, by załatwić wszystkie formalności w jednym miejscu, VU prowadzi nas w wyśmienity sposób przez sporą większość trudności organizacyjnych, jakie na dzień dobry możemy napotkać. A co do bariery językowej – czy wiecie, że statystyczny holenderski nastolatek mówi po angielsku lepiej niż statystyczny Amerykanin? Gwarantuję niezapomniane wrażenia, gdy każda kasjerka z warzywniaka porozumie się z Wami nieskazitelną (prawie) mową Shakespeare'a. A dla chętnych rząd holenderski oferuje darmowe lekcje holenderskiego, więc w ciągu roku życia tutaj można jeszcze podłapać dodatkowy język do wpisania w CV (i to jaki egzotyczny – gdzie poza Holandią mówią po holendersku? ;)).

Gdy planujemy program stypendialny, bardzo istotnym aspektem (nierzadko pierwszym, branym pod uwagę przy rozważaniu ewentualnego wyjazdu) są finanse. Stypendium programowe jest tu jednak na tyle wysokie, że bez problemu wystarczy na opłacenie czesnego i czynszu. Tak naprawdę nikt się chyba nie spodziewał, że stypendium wystarczy na pokrycie kosztów życia w stu procentach, i tak jest również tutaj – na szczęście jednak koszta życia w Holandii nie są wcale tak ogromne, jak mogłoby się wydawać (na pewno nie trzeba kosztów jedzenia mnożyć przez cztery – przelicznik cenowy jest znacznie korzystniejszy); zresztą, możliwości zarobku jest tu całkiem sporo. Poczynając od posady research assistanta na uczelni (dla NAPRAWDĘ ambitnych), poprzez udzielanie korepetycji za pośrednictwem specjalnej organizacji studenckich korepetytorów (!) czy odbycie praktyk w jednej z kilkudziesięciu firm pozostających w kontakcie z VU, aż do typowo studenckich prac na kasie w sklepie czy barze, na pewno każdy znajdzie coś dla siebie – zresztą, przy odpowiednim buforze finansowym praca może się okazać zupełnie zbyteczna i można się w pełni skupić na życiu studenckim i nauce.

Okazji do partycypowania w szeroko pojętym życiu studenckim ma się zresztą całkiem sporo dzięki studenckiemu kampusowi Uilenstede, położonemu niedaleko samej uczelni, na którym ląduje znakomita większość studentów matematyki z granicy. Ponieważ wszyscy tam jadą na tym samym wózku, o brak tematu do rozmów martwić się nie trzeba, a wspólne kuchnie czy łazienki zdecydowanie WYMUSZĄ nawiązanie choćby szczątkowych kontaktów z sąsiadami. :P Ale jeśli ktoś woli ciche, prywatne mieszkania, VU oferuje zakwaterowanie w niemalże całym Amsterdamie, a oferowane warunki mogą (oczywiście, w zależności od budynku, na jaki się "trafi") nierzadko pozytywnie zaskoczyć (MAM WŁASNĄ KUCHNIĘ!!!).

Nauka na VU to zdecydowanie odmienne doświadczenie od nauki w Polsce – jest tu znacznie więcej samodzielnej pracy, samodzielnego czytania książek/notatek i samodzielnego rozwiązywania zadań, a mniej przebywania na wykładach i ogólnie w budynkach uczelni. Żeby daleko nie szukać, ja mam zajęcia tylko trzy razy w tygodniu, a znam ludzi, którzy mają tylko dwa. Instytucja „ćwiczeń” (jako zajęć na uczelni) praktycznie nie istnieje, a robienie piętnastominutowych przerw co czterdzieści pięć minut jest ściśle przestrzegane (bo wykładowcy też chcą napić się kawy ;)). W zależności od wybranych przedmiotów, zaliczenie może polegać wyłącznie na oddawaniu prac domowych, a najczęściej stanowią one mniej więcej 60% oceny końcowej.

Właśnie – przedmioty. Co z nimi? STMP oferuje tu niezwykle sporą swobodę – dla partycypujących w nim studentów nie istnieje coś takiego jak „przedmiot obowiązkowy” – my mamy po prostu zebrać odpowiednią ilość punktów ECTS, a poprzez jakie przedmioty to zrobimy, to już nasza sprawa. Dodatkowo, uczelnie w Holandii zawiązały niezwykle interesujący „sojusz”, dzięki któremu studenci matematyki na jednej uczelni mogą chodzić na zajęcia na pozostałe – powoduje to, że de facto nie jesteśmy studentami wyłącznie VU w Amsterdamie, ale również uniwersytetu w Utrechcie, Radboud czy Nijmegen. A koszty podróży pociągiem są refundowane. Żyć, nie umierać (chyba że z zadyszki przy bieganiu między stacjami). VU jest najbardziej znany jako uniwersytet skupiony na zastosowaniach matematyki i zdecydowanie studenci matematyki finansowej czy modelowania znajdą tu wiele przedmiotów dla siebie (zebranych w poręcznym pliku PDF), ale teoretycznych przedmiotów również dostatek (uczęszczanie na które daje również wyśmienitą okazję do zwiedzenia Holandii, gdyż przedmioty te mogą, jak napisałem wcześniej, być oferowane na którymś z partnerskich uniwersytetów).

Co jeszcze? Kraj! Lądujemy w Amsterdamie, mieście tysiąca muzeów, miliona parków, tryliarda świetnych widoków[2]! W zasięgu wycieczki rowerowej – bo, nie miejmy złudzeń, bez roweru w Holandii praktycznie ani rusz – lub ewentualnie pociągowej mamy praktycznie całą Holandię, by zaspokoić wszystkie swe turystyczne potrzeby. Myślę, że tej perspektywy nie trzeba nikomu reklamować.

Program stypendialny STMP jest zatem wyśmienitą okazją do zobaczenia szerszego świata w „amortyzowany” – przez niezwykle pomocne studenckie organizacje – i „bezpieczny” sposób, odświeżenia swoich kolarskich

[2]I dziesiątek coffee shopów, W KTÓRYCH NIE SPRZEDAJE SIĘ KAWY!

umiejętności no i przeżycia niezapomnianej przygody. I zobaczenia Świętego Mikołaja w biskupiej szacie z orszakiem czarnoskórych służących. Polecam aplikowanie z całego serca – nic to nikomu nie zaszkodzi, a ewentualne koszta są refundowane w razie rezygnacji (oczywiście, jeśli zrezygnuje się w rozsądnym terminie).

Więcej informacji można znaleźć na stronie koordynatora programu z ramienia UŚ, dra hab. Michała Baczyńskiego:

`http://www.math.us.edu.pl/michal/Amsterdam/Amsterdam.html`

Niewinny Rosomak

Autor artykułu, Mateusz Jurczyński, jest studentem ostatniego roku studiów magisterskich w Uniwersytecie Śląskim; w ubiegłym roku akademickim był przewodniczącym Koła Naukowego Matematyków UŚ oraz redaktorem naczelnym [Macierzatora].

W grudniowym numerze opublikujemy wspomnienia z ubiegłorocznego pobytu w Amsterdamie absolwenta UŚ, obecnie doktoranta Lancaster University, Michała Gnacika.

[Spowalnianie rozbieżności szeregów]

Zazwyczaj mówiąc o szeregach liczbowych badamy ich zbieżność. W tym artykule zajmiemy się jednak szeregami rozbieżnymi.

Szereg harmoniczny to szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots .$$

Jak wiadomo, jest on rozbieżny[3]. Jednak szereg ten jest rozbieżny bardzo powoli. Żeby jego suma częściowa przekroczyła 10 potrzebujemy dodać 12367 wyrazów tego szeregu, a dla ograniczenia równego 100 potrzeba 15092688622113788323693563264538101449859497 wyrazów. Jak duża jest to liczba? Wyobraźmy sobie, że chcielibyśmy dodać do siebie tyle wyrazów szeregu harmonicznego, żeby sprawdzić, czy rzeczywiście ich suma przekracza 100. Jeżeli założymy, że nasz komputer będzie wykonywał jedno dodawanie w czasie 10^{-9} sekundy, to na wykonanie całego zadania musielibyśmy poświęcić przynajmniej $4.7826 \cdot 10^{26}$ lat[4]. Skoro jesteśmy już przy dużych liczbach, można pokazać, że aby suma częściowa powyższego szeregu przekroczyła 1000 potrzeba mniej więcej $1.106 \cdot 10^{434}$ wyrazów.

[3] Przypuśćmy, że jego suma S jest skończona. Wtedy $S > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = S$. Sprzeczność.

[4] dla porównania wiek wszechświata szacuje się na $13.75 \cdot 10^9$ lat.

Można pokazać, że sumy częściowe szeregu harmonicznego uciekają do nieskończoności równie powolnie, co logarytm (czyli bardzo powoli).

Jak produkować takie powoli rozbieżne szeregi? Okazuje się, że bardzo łatwo. Udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb dodatnich takim, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny. Wtedy szereg postaci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n},$$

gdzie $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, jest również rozbieżny.

W dowodzie powyższego twierdzenia posłużymy się następującymi, znanymi faktami:

- *Niech $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zbieżnym do* 0, *wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\alpha_n)}{\alpha_n} = 1.$$

- (Twierdzenie Stolza) *Niech $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami liczb rzeczywistych oraz niech $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem rosnącym do $+\infty$, wówczas jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\beta_n-\beta_{n-1}} = g \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = g$.*

Niech $b_n = \frac{a_n}{s_n}$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Pokażemy, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ucieka do nieskończoności w tym samym tempie co ciąg $(\ln s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{\ln s_n} = 1$.

Zauważmy, że

$$1 - b_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{a_1+a_2+\ldots a+_n} - \frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n} = \frac{s_{n-1}}{s_n}, \quad (n\in\mathbb{N}),$$

oraz że

$$\frac{b_n}{\ln\frac{s_n}{s_{n-1}}} = \frac{b_n}{-\ln\frac{s_{n-1}}{s_n}} = \frac{-b_n}{\ln(1-b_n)}, \quad (n>1).$$

Na mocy pierwszego faktu dostajemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\ln\frac{s_n}{s_{n-1}}} = 1.$$

Zauważmy, że

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{\ln s_n} = \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{\ln s_1 + \ln\frac{s_2}{s_1} + \ldots + \ln\frac{s_n}{s_{n-1}}}, \quad (n>1).$$

Stąd, na mocy twierdzenia Stolza, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{\ln s_1 + \ln \frac{s_2}{s_1} + \ldots + \ln \frac{s_n}{s_{n-1}}} = 1.$$

Co kończy dowód.

vil

[Komunikaty KNM]

Jak co roku, Koło Naukowe Matematyków UŚ organizuje na terenie całego Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii UŚ zbiórkę mikołajkową. W tym roku zbieramy dary dla podopiecznych związanej z Caritasem świetlicy środowiskowej św. Wojciecha w Katowicach. Zbieramy zabawki, środki czystości, artykuły szkolne i papiernicze oraz słodycze.

Najprawdopodobniej przekazane przez nas rzeczy będą jedynym źródłem prezentów świątecznych dla dzieci ze świetlicy w tym roku. Tym serdeczniej zachęcamy do zaangażowania się w zbiórkę! Kosze na dary zostaną wystawione w różnych miejscach na terenie Wydziału w dniach 6–9 grudnia 2011.

***

Serdecznie zachęcamy do udziału w organizowanych przez nas spotkaniach referatowych. W tym semestrze oprócz tradycyjnych referatów proponujemy Wam kilka cykli. Pierwszy z nich, wykładowy, prowadzony przez

Opiekuna KNM, dra Tomasza Kochanka, poświęcony jest algebrom Banacha i teorii spektralnej. Docelowym zagadnieniem będzie umotywowanie i wprowadzenie intuicji na temat C*-algebr oraz ogólnej wersji twierdzenia spektralnego. Kolejny cykl, warsztatowy, prowadzony przez Piotra Idzika, to kurs programowania obiektowego od podstaw. Oprócz tego, tradycyjnie, prowadzimy referaty dla uczniów szkół średnich i nie tylko (poruszana podczas nich tematyka nierzadko jest nowością również dla studentów), a także kołowe spotkania referatowe. Większość wykładów jest nagrywana; informacje o spotkaniach oraz wszelkie materiały można znaleźć na stronie Koła: `www.knm.katowice.pl`; prowadzimy również oficjalny kołowy profil na facebooku (`www.facebook.com/knm.katowice`). W razie wszelkich pytań prosimy o kontakt pod adresem `knm@knm.katowice.pl` lub bezpośrednio w pokoju 524.

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Tomasz Kochanek, Mateusz Jurczyński,
Szymon Draga, Piotr Idzik, Paweł Zwoleński
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

`macierzator@knm.katowice.pl`.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`.
Wydanie elektroniczne [Macierzatora] posiada numer ISSN: 2083-9774.

listopad 2011

[Kącik TEXowy część 4]

formatowanie tekstu: wypunktowania, cytowania, druk dosłowny

Na koniec poprzedniej części wspomnieliśmy o otoczeniach, używanych przy wyrównywaniu tekstu czy pisaniu w kolumnach. W tej części przedstawimy inne otoczenia formatujące, służące do wyliczeń czy cytowań oraz omówimy kilka przydatnych pakietów `multicol`, `enumitem` i `enumerate`.

Beata Łojan (`b.lojan@knm.katowice.pl`)

[Skład wielołamowy – pakiet `multicol`]

Jak już wspomnieliśmy w poprzedniej części do składania tekstu w kilku kolumnach przydatny jest pakiet `multicol`; dostarcza on środowisko `multicols`. Jest to przykład środowiska, którego nie można w sobie zagnieżdżać oraz posiadającego parametry opcjonalne i obowiązkowe.

Sposób wywołania środowiska znajduje się w ramce po lewej. Obowiązkowy argument `kol` środowiska określa liczbę kolumn; kolejne dwa argumenty nie są obowiązkowe. Argument opcjonalny `tytuł` powoduje umieszczenie „`tytułu`" jeszcze przed rozpoczęciem składu w wielu kolumnach (inaczej pozwala na umieszczenie „tytułu" dla fragmentu tekstu, który będzie składany wieloszpaltowo). Drugi argument nieobowiązkowy `odstęp` określa minimalną ilość miejsca jaka musi być na stronie, by otworzyć środowisko (domyślnie jest to 50pt). Kolejne kolumny rozpoczynamy instrukcją `\columnbreak`.

multicol.tex
```
\begin{multicols}{kol}[tytuł][odstęp]
To jest przykład tesktu łamanego
w kilku szpaltach.
\columnbreak
Przy użyciu pakietu multicol.
\end{multicols}
```

Ponadto za pomocą kilku instrukcji (opisanych poniżej), możemy dostosować wygląd środowiska do naszych potrzeb.

`\premulticols` określa minimalną ilość miejsca na stronie, która pozwala na otwarcie środowiska; wartość domyślna `50pt`;

`\postmulticols` określa ilość miejsca na stronie, która powoduje pozostawienie tekstu za środowiskiem na tej samej stronie lub jego przeniesienie na następną stronę; wartość domyślna `20pt`;

`\multicolsep` określa pionowy odstęp między środowiskiem, a tekstem poprzedzającym i następującym; domyślnie `12pt plus 4pt minus 3pt`.

`\columnsep` określa odległość między szpaltami; wartość domyślna `10pt`;

`\linewidth` wartość według której obliczana jest szerokość szpalty;

`\columnseprule` określa grubość linii oddzielającej szpalty; domyślnie `0pt`;

`\columnseprulecolor` określa kolor linii oddzielającej szpalty; zmienić go możemy poprzez `\renewcommand\columnseprulecolor{\color{red}}`;

`\flushcolumns` kolumny są zawsze równe; gdy liczba wierszy nie jest podzielna przez liczbę kolumn, dostawiany jest dodatkowy odstęp między liniami;

`\raggedcolumns` kolumny są równe; gdy liczba wierszy nie jest podzielna przez liczbę kolumn, to ostatnia kolumna jest krótsza;

[Otoczenia: `enumerate`, `itemize`, `description`]

Formatowanie tekstu to nie tylko dobór odpowiedniego fontu, ale również stosowanie wyszczególnień czy wyliczeń. W LaTeXu służą nam do tego trzy środowiska: `enumerate`, `itemize`, `description`; pierwsze służy do wyliczeń, dwa kolejne do wyszczególnień; środowiska te możemy w sobie zagnieżdżać. Każdy kolejny punkt w takim środowisku rozpoczynamy instrukcją `\item`.

enumerate.pdf

1. tekst
   (a) tekst
      i. tekst
         A. tekst
         B. tekst
      ii. tekst
   (b) tekst
2. tekst

enumerate.tex

```
\begin{enumerate}
  \item tekst
  \begin{enumerate}
          \item tekst
          \begin{enumerate}
                  \item tekst
                  \begin{enumerate}
                      \item tekst
                      \item tekst
                  \end{enumerate}
                  \item tekst
          \end{enumerate}
      \item tekst
  \end{enumerate}
  \item tekst
\end{enumerate}
```

Analogicznie dla otoczenia `itemize`; wówczas otrzymamy kolejno: •, –, ∗, ·. Ponadto polecenie `item` posiada parametr opcjonalny, dzięki któremu możemy w danym miejsu zmienić wygląd wyliczeń. Przykładowo:

item.pdf

Punkt 1 Tekst 1

Punkt 2 Tekst 2

item.tex

```
\begin{itemize}
   \item[\bf Punkt 1] Tekst 1
   \item[\bf Punkt 2] Tekst 2
\end{itemize}
```

Ostatnie wspomniane otoczenie `description` służy do tworzenia wyszczególnień, których etykietami są opisy; efekt działania możemy zobaczyć na poprzedniej stronie; poniżej kod źródłowy:

description.tex

```
\begin{description}
\item[\premulticols] określa minimalną ilość miejsca na stronie, która pozwala na...
\item[\postmulticols] określa ilość miejsca na stronie, która powoduje...
\end{descripition}
```

Dostępne są również pakiety `enumerate` i `enumitem`, które pozwalają modyfikować i dostosować wygląd tych otoczeń do własnych potrzeb.

Przykładowo pakiet `enumerate` – jak łatwo się domyślić – redefiniuje środowisko `enumerate`, dodając dodatkowy parametr podawany przy jego otwarciu. *Parametr* może przyjmować jedną z wartości: `A` – duże litery, `a` – małe litery, `I` – duże cyfry rzymskie, `i` – małe cyfry rzymskie, `1` – cyfry arabskie. Może on również zawierać dowolny ciąg znaków – wówczas pierwszy znak zgodny z wcześniejszą listą definiuje sposób numerowania.

Przykład użycia środowiska enumerate (z pakietem enumerate):

enumerate.tex

```
\begin{enumerate}[{Punkt }1{:}]
\item Tekst 1
\item Tekst 2
\end{enumerate}
```

enumerate.pdf

Punkt 1: Tekst 1

Punkt 2: Tekst 2

Drugi z wymienionych pakietów – enumitem reimplementuje wszystkie te otoczenia, pozwalając w łatwy sposób wpływać na ich wygląd. Poszczególne parametry możemy zmienić w momencie wywołania środowiska (podając je jako dodatkowy parametr otoczenia) lub wywołując odpowiednie makroinstrukcje:

\setlist{parametry} określa parametry dla wszystkich środowisk na wszystkich poziomach;

\setlist[poziom]{parametry} określa parametry dla wszystkich środowisk, dla wskazanego poziomu;

\set*nazwa*{parametry} określa parametry dla środowiska *nazwa* na wszystkich poziomach;

\set*nazwa*[poziom]{parametry} określa parametry dla środowiska *nazwa* dla wskazanego poziomu;

gdzie *nazwa* to enumerate, itemize lub description, a *parametry* określamy podając listę opcji oddzielonych przecinkami w postaci opcja=wartość.

pionowe	topsep=<odległość>	*odległość* przed i po środowisku;
	partosep=<odległość>	dodatkowa *odległość* przed i po środowisku jeśli rozpoczyna ono akapit;
	itemsep=<odległość>	*odległość* między elementami listy;
	parsep=<odległość>	dodatkowa *odległość* między akapitami;
odstępy poziome	leftmargin=<długość>	*długość* lewego marginesu tekstu podstawowego środowiska;
	rightmargin=<długość>	*długość* prawego marginesu;
	listparindent=<długość>	*długość* wcięcia akapitowego;
	labelwidth=<szerokość>	*szerokość* pola etykiety;
	labelsep=<odległość>	*odległość* etykiety od tekstu podstawowego;
	labelindent=<długość>	*długość* wcięcia pierwszej linii etykiety;
	itemindent=<długość>	*długość* wcięcia pierwszej linii tekstu;
\leftmargin + \itemindent = \labelindent + \labelwidth + \labelsep		

Tabela 1: Pakiet enumitem – wybrane opcje

Poza parametrami wymienionym w tabeli, dostępnych jest jeszcze wiele innych. Jak na przykład:

label=<polecenie> sposób wyprowadzenia licznika (licznik w postaci liczby arabskiej z kropką: label=\arabic*.);

format=<polecenia> sposób prezentowania etykiety (etykieta pogrubionym fontem w kolorze czerwonym: format=\bfseries\color{red});

start=<wartość> określa *wartość* początkową licznika;

[Otoczenia: quote, quotation, verse]

Cytaty i utwory poetyckie np. wiersze możemy składać w LaTeXu za pomocą trzech dostępnych otoczeń: `quote`, `quotation` oraz `verse`. Pierwsze dwa – `quote` i `quotation` – służą do składania cytatów; otoczenie `quote` służy do składania krótkich cytatów lub ciągu takich cytatów, które oddzielamy pustym wierszem; podobnie `quotation` służy do prezentowania cytatów, jednak dłuższych niż akapit. W przeciwieństwie do otoczenia `quote`, wewnątrz `quotation` nowy akapit rozpoczyna się od wcięcia akapitowego. Środowisko `verse` służy natomiast do składania wierszy; podczas pisania w tym otoczeniu poszczególne wersy należy oddzielać od siebie instrukcją \\, natomiast kolejne zwrotki pustą linią.

[Druk dosłowny – verbatim]

Podczas pracy w LaTeXu kiedyś nadchodzi taki moment, że chcemy umieścić w naszym artykule tekst złożony imitacją pisma maszynowego; w takim kroju wszystkie znaki są jednakowej szerokości. Najczęściej potrzebne jest to w przypadku tekstów zawierających kody programów.

W LaTeXu służy do tego środowisko `verbatim` – do składania większych fragmentów tekstu, lub instrukcja `\verb+`*tekst*`+` – do składania pojedyńczych wierszy w tekście. Środowisko to – jak i jego skrócona wersja – składają tekst dosłownie z zachowaniem wszystkich odstępów i łamań wierszy. Często są one wykorzystywane do składania przykładów kodu LaTeXa, gdyż wewnątrz otoczenia `verbatim` (i instrukcji `\verb`) nie są wykonywane żadne instrukcje LaTeXowe. Dodatkowo środowisko `verbatim` oraz instrukcja `\verb` posiadają tzw. *wersję gwiazdkową*; wewnątrz tego środowiska każda spacja zostaje zamieniona na ␣, tzn.:

verbatim*.tex

```
\begin{verbatim*} wersja  gwiazdkowa   środowiska\end{verbatim*}
\verb*+ pokazuje wszystkie spacje    w  tekście +
```

verbatim*.pdf

```
␣wersja␣␣gwiazdkowa␣␣␣środowiska
␣pokazuje␣wszystkie␣spacje␣␣␣␣w␣␣tekście
```

Podczas korzystania z tego środowiska należy pamiętać, że nie można go umieszczać jako argumentu wewnątrz innych poleceń – jest to polecenie *kruche*[5].

Literatura

[1] *Comprehensive TEX Archive Network*, `http://www.ctan.org`
dokumentacja wybranych pakietów: `enumitem`, `enumerate`, `multicol`;

[2] L. Lamport, *LaTeX system opracowywania dokumentów*, WNT, Warszawa 2004;

❀ ❀ ❀

[5] polecenia *kruche* (ang. *fragile command*) – polecenia, których użycie jako argument wewnątrz innych poleceń skutkuje pojawieniem się błędu. Innymi poleceniami kruchymi są np. `\footnote`, `\item`. Jeśli chcemy użyć polecenia kruchego, należy je poprzedzić instrukcją `\protect`.