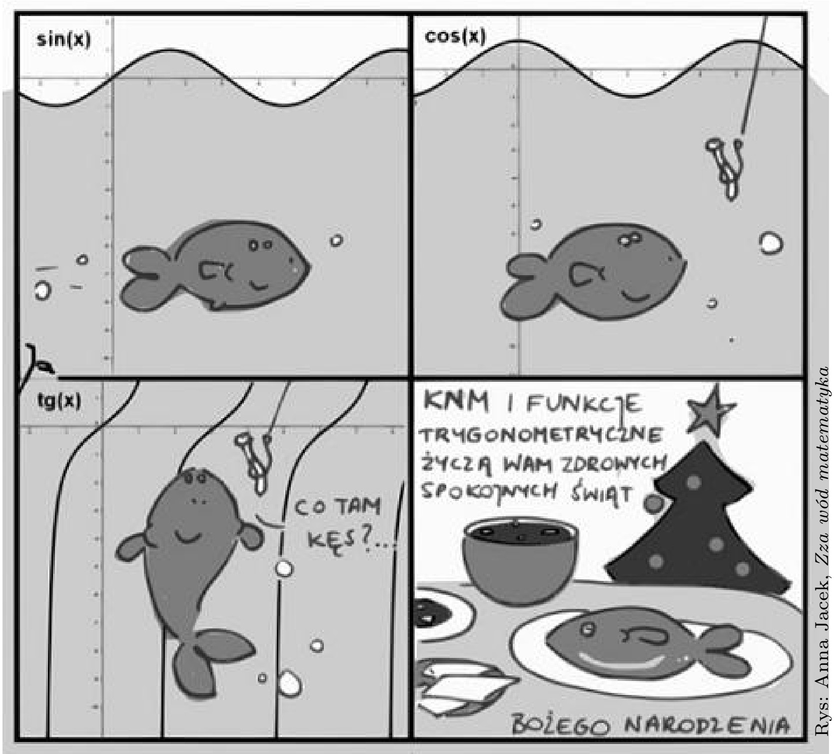
[MACIERZATOR42]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



Rys: Anna Jacek, *Zza wód matematyka*

Witamy w grudniowym numerze [MACIERZATORa]!

To już ostatni numer Macierzatora w tym roku kalendarzowym. Tym razem proponujemy Wam biografię Hypatii – pierwszej znanej powszechnie w historii matematyki kobiety, opowiemy o twierdzeniu Banacha-Steinhausa w przestrzeniach beczkowych, poruszymy temat teorii przestrzeni operatorowych, zaprezentujemy kolejny problem, z którym można się zmierzyć, spojrzymy na nasze podejście do nauki z nieco innej niż zazwyczaj strony oraz przedstawimy kolejną część Kącika TEXowego. Prezentujemy również fragmenty Małego słownika człowieka średnio wykształconego, który swego czasu krążył w Instytucie Matematyki UŚ.

Zachęcając do lektury, życzymy równocześnie spokojnych Świąt oraz dobrego nowego roku –

Redakcja

ISSN 2083-9774

[Prawie jak πografia – Hypatia z Aleksandrii 4/3 w. p.n.e.]

Pierwsza kobieta w historii matematyki, męczennica nauki, bohaterka grudniowej πografii w Macierzatorze – to tylko niektóre z jej tytułów. Hypatia – bo o niej mowa – jest postacią o której słyszeli chyba wszyscy – była matematyczką i żyła dawno temu. Koniec. No dobrze, a coś więcej? Cóż, przede wszystkim Hypatia była nie byle jaką matematyczką – na miejsce we wszystkich podręcznikach historii matematyki zasłużyła sobie nie z racji tego, że po prostu była pierwsza – ważne jest to jak wiele dla rozwoju matematyki zrobiła. A zrobiła niemało – przede wszystkim zawdzięczamy jej poprawione i opatrzone komentarzami nowe wydania takich dzieł jak „Arytmetyka” Diofantosa i „Elementy” Euklidesa, które ukształtowały myśl matematyczną na wiele stuleci.


zdjęcie z filmu „Hypatia”

Poza działalnością naukową, Hypatia była doskonale znana jako nauczycielka matematyki, astronomii i filozofii. Jej wykłady były otwarte dla wszystkich i z powodu ogromnego zainteresowania (tak, w tamtych czasach matematyka była popularną rozrywką intelektualną) często odbywały się na świeżym powietrzu. Swoim uczniom przekazywała nie tylko wiedzę, ale również (a może przede wszystkim) dyscyplinę intelektualną i otwarte spojrzenie na świat i problemy filozoficzne. Nic dziwnego, że jej studenci zachodzili w życiu najdalej jak w ówczesnych czasach się dało – zostawali cenionymi naukowcami, urzędnikami państwowymi, kapłanami kościołów pogańskich lub kościoła rzymskiego (Matematyka podstawą sukcesu – edycja pierwsza?).

Tak jak życie Hypatii wywarło znaczny wpływ na dalszy rozwój matematyki i nauki, tak jej śmierć stała się symbolem dla współczesnych Hypatii myślicieli; pamięć o niej odżyła na nowo podczas Oświecenia w Europie. Historia śmierci Hypatii jest tragiczna – zdecydowana większość z wielkich matematyków spokojnie dożywała swojej starości. Owszem, w przypadku niektórych – w zakładzie dla obłąkanych; zdarzali się też matematycy którzy ginęli z powodu swoich niedostatecznych zdolności szermierczych, jednak żaden z nich nie został bestialsko zamordowany przez tłum religijnych fanatyków. Poza Hypatią.

Gdy w 412 roku biskupstwo aleksandryjskie objął Cyryl, wyrok na Hypatię właściwie zapadł. W przeciwieństwie do swojego poprzednika Teofila – mającego opinię tolerancyjnego i oświeconego – Cyryl był kwintesencją tego co dziś nazwalibyśmy fanatyzmem religijnym. W krótce po objęciu przez niego stanowiska Hypatia została z ambony nazwana czarownicą i satanistką (wiadomo, jeżeli Twoja córka zajmuje się matematyką, to wiedz, że Szatan się nią interesuje). W opinii współczesnych badaczy – m.in. prof. Marii Dzielskiej – Cyrylem powodowała nieopisana, wręcz patologiczna nienawiść do Hypatii. Nie mogąc się pogodzić z jej olbrzymią popularnością i powszechnym szacunkiem, za pomocą pomówień i intryg udało mu się doprowadzić do wyjątkowo okrutnego (nawet jak na tamte czasy) linczu. Bezpośrednią odpowiedzialnością za mord na Hypatii obarczyli Cyryla bezstronni komentatorzy ówczesnych wydarzeń politycznych – wśród nich ceniony za wstrzemięźliwość w osądach Sokrates Scholastyk. A jak dokładnie przedstawiał się smutny koniec Hypatii? Aleksandryjscy chrześcijanie (z lektorem Piotrem na czele) zdarli z niej ubranie i wyłupili jej oczy a następnie zatłukli kawałami ceramicznych mis. Hypatia miała 45 lat.

Mikołaj Stańczyk

[Twierdzenie Banacha-Steinhausa w przestrzeniach beczkowatych]

Podzbiór A przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$ $(=\mathbb{R},\mathbb{C})$ nazywamy *zbiorem zbalansowanym,* jeżeli dla dowolnego takiego $\alpha \in \mathbb{K}$, że $|\alpha| \leqslant 1$ zachodzi[1] $\alpha A \subset A$. Jeżeli zbiór A ma własność, że dla dowolnego $x \in X$ istnieje takie $\alpha_x > 0$, że $x \in \alpha_x A$, to zbiór A nazywamy *zbiorem pochłaniającym.*

Twierdzenie 1. *Domknięty i pochłaniający zbiór zbalansowany w przestrzeni Banacha ma niepuste wnętrze.*

Dowód. Załóżmy, że A jest domknięty, pochłaniający i zbalansowany. Dla dowolnej liczby $\alpha \geqslant 0$ istnieje taka liczba naturalna n, że $\alpha < n$, a zatem dla dowolnego $\alpha > 0$ zbiór $\frac{\alpha}{n}A$ jest podzbiorem A dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, co wynika z założenia, że A jest zbalansowany. Jest to równoważne inkluzji $\alpha A \subset nA$. Prawdziwa jest zatem następująca równość

$$\bigcup_{\alpha \geqslant 0} \alpha A = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA. \tag{1}$$

A jest pochłaniający, więc zbiór $\bigcup_{\alpha\geqslant 0} \alpha A$ pokrywa całą przestrzeń. Z równości (1) wynika, że również $\bigcup_{n=1}^{\infty} nA$ pokrywa całą przestrzeń. Ponieważ

[1] αA to z definicji zbiór elementów postaci αx, gdzie $x \in A$.

nA jest przeciwobrazem zbioru A (domkniętego z założenia) poprzez odwzorowanie ciągłe $\varphi(x) = \frac{x}{n}$, jest zbiorem domkniętym. Z twierdzenia Baire'a przynajmniej jeden zbiór nA zawiera pewną kulę $K(nx_0, nr)$. Wówczas $K(x_0, r) \subset A$, co należało udowodnić. $\square$

Podzbiór A przestrzeni liniowej nazywamy *wypukłym*, jeżeli zawiera każdą kombinację wypukłą dowolnych swoich elementów, to znaczy, że jeżeli $x, y \in A$, to $\alpha x + (1-\alpha)y \in A$ dla $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Zbiór domknięty, wypukły, zbalansowany i pochłaniający nazywamy *beczką*.

Twierdzenie 2. *Jeżeli A jest beczką w przestrzeni Banacha, to A jest otoczeniem zera.*

Dowód. Oznaczmy przez B zbiór $\{x \in X : x \in A \text{ i } -x \in A\}$. A jest pochłaniający, więc istnieją takie $\alpha, \beta > 0$, że $x \in \alpha A$ oraz $-x \in \beta A$. A jest zbalansowany, więc dla $a < b$ prawdziwa jest inkluzja $aA \subset bA$. Otrzymujemy zatem $\alpha A, \beta A \subset \gamma A$, gdzie $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$. Wynika stąd, że zbiór B jest pochłaniający. Oczywiście $\lambda B \subset B$ dla $|\lambda| \leqslant 1$, więc B jest zbalansowany. Z twierdzenia 1 wynika, że B ma wnętrze niepuste, co oznacza, że pewna kula $K(x, r)$ zawiera się w B. Z definicji zbioru B wynika, że $K(x, r)$ oraz $K(-x, r)$ zawierają się w A. Z wypukłości zbioru A otrzymujemy, że $K(0, r) \subset A$, co oznacza, że A jest otoczeniem zera. $\square$

Przedstawimy obecnie dowód twierdzenia Banacha-Steinhausa, wykorzystujący własności beczek w przestrzeniach Banacha.

Twierdzenie 3 (Banacha-Steinhausa)**.** *Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha oraz Y jest przestrzenią unormowaną. Niech (L_n) będzie ciągiem ciągłych odwzorowań liniowych przekształcających X w Y. Jeżeli dla każdego $x \in X$ ciąg $(L_n x)$ jest ograniczony oraz $x_n \to 0$, to $L_n x_n \to 0$.*

Dowód. Zauważmy, że zbiór

$$W = \{x \in X \colon \forall_{n \in \mathbb{N}} \; \|L_n x\| \leqslant 1\}$$

jest zbiorem domkniętym. Z założenia o ograniczeniu ciągu $(L_n(x))$ dla dowolnego x wynika, że W jest pochłaniający. Ponieważ dla $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ i $x, y \in W$ zachodzi

$$\|L_n(\alpha x + (1-\alpha)y)\| \leqslant \alpha \|L_n x\| + (1-\alpha)\|L_n y\| \leqslant \alpha + 1 - \alpha = 1,$$

dla dowolnego n, więc W jest zbiorem wypukłym. Jeżeli $|\alpha| \leqslant 1$, to dla $x \in W$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność

$$\|L_n(\alpha x)\| \leqslant |\alpha| \|L_n x\| \leqslant 1,$$

więc A jest również zbiorem zbalansowanym. Pokazaliśmy zatem, że A jest beczką. Z twierdzenia 2 wynika, że A jest otoczeniem zera. Istnieje zatem taka $\delta > 0$, że jeżeli $\|x\| < \delta$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\|L_n x\| \leqslant 1$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $x_n \to 0$, istnieje takie n_0, że $\|x_n\| < \delta\varepsilon$ dla $n > n_0$. Wówczas dla $n > n_0$

$$\|L_n x_n\| \leqslant \varepsilon,$$

co należało udowodnić. □

Przestrzeń liniowo-topologiczną X, w której każda beczka jest otoczeniem zera, nazywamy *przestrzenią beczkowatą.* Przeprowadzając dowód analogiczny do powyższego, wnioskujemy, że w przestrzeniach beczkowatych prawdziwe jest twierdzenie Banacha-Steinhausa. Dowód w przypadku przestrzeni beczkowatych nie korzysta z zupełności, lecz wyłącznie ze struktury algebraicznej przestrzeni liniowej i pojęcia otoczenia zera. Z twierdzenia 2 wynika, że w szczególności każda przestrzeń Banacha jest przestrzenią beczkowatą. Oznacza to, że przestrzenie beczkowate to ogólniejsze przestrzenie, w których zachodzi twierdzenie Banacha-Steinhausa.

[Literatura]

[1] J. Musielak: *Wstęp do analizy funkcjonalnej,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1976.

[2] W. Rudin: *Analiza funkcjonalna,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009.

[3] P. Zwoleński: *Twierdzenie Baire'a i jego zastosowania*, praca dyplomowa licencjacka, Politechnika Śląska, Gliwice 2010 (do wglądu w bibliotece Instytutu Matematyki Politechniki Śląskiej).

Paweł Zwoleński (pawel.zwolenski@gmail.com)

[Problemy lokalnie otwarte]

W tym numerze proponujemy Wam zastanowienie się nad pytaniami postawionymi przez Tomka Kanię:

Udowodnić, że liczby porządkowe α o tej własności, że $\alpha = \omega^\alpha$ nie tworzą zbioru. Jaka jest najmniejsza nieskończona liczba o tej własności? Zastosować liczby o tej własności do wykazania, że istnieje nieskończenie wiele par liczb porządkowych (α, β) o tej własności, że $\alpha^\beta = \beta^\alpha$.

Na maile (nie tylko od studentów!) czekamy pod adresem

`macierzator@knm.katowice.pl`.

[Słówko o nauce]

Podczas procesu nauczania zmienia się podejście człowieka do nauki. Na początku nie patrzy się na nią zbyt głęboko (chyba że ktoś miał głębokie filozoficzne refleksje podczas uczenia się alfabetu i wkładania kwadratowego klocka do okrągłego otworu), potem przez właściwie całą szkołę uważa się ją za bardzo „kompletny” twór, a następnie przychodzą studia i człowiek uświadamia sobie, że jest w niej jeszcze to i owo do zrobienia, mimo że sięga ona dalej i szerzej niż można się było kiedykolwiek wcześniej spodziewać.

Ale przecież tak naprawdę nauka to coś, za pomocą czego poznajemy świat od strony „technicznej”. I wydaje się nam, że dzisiaj już wiemy bardzo wiele. Okazuje się jednak, że jest bardzo dużo – wydawałoby się, oczywistych – szczegółów, które poznaliśmy dopiero niedawno, albo których nie znamy do dziś; i odwrotnie, są – wydawałoby się: nierozwiązywalne – zagadnienia, które człowiek wrzuca do szufladki paradoksów logicznych po osiągnięciu dwucyfrowego wieku, na które nauka znalazła odpowiedź.

Przykładem jest odwieczne pytanie „Co było pierwsze – jajko czy kura?” Dla mnie to pytanie było zawsze czymś w rodzaju dalekiego kuzyna paradoksu kłamcy, prostym przykładem pytania, na które każda odpowiedź jest zła. A tu co? Naukowcy z Wielkiej Brytanii odkryli (w zeszłym roku), że do utworzenia czegoś takiego jak „jajko” w organizmie rodzica potrzebne jest pewne konkretne białko. Bez tego białka nie byłoby jajka. A to białko da się znaleźć jedynie u kur. Zatem najpierw była kura! Wnioski płyną stąd dwa – po pierwsze, że pierwsza kura pojawiła się na świecie w jakiś tajemniczy sposób (kury są z Marsa, koguty z Wenus?), a po drugie, że Stephen Hawking czasem się myli, albowiem ów wypowiedział się kiedyś, że jego zdaniem pierwsze było jajko. Oczywiście, jak zawsze przy dziwnie sformułowanych pytaniach o nie do końca sprecyzowanych założeniach, zapewne niejeden nasz Czytelnik nie zgodzi się z diagnozą Brytyjczyków; na szczęście nie jest naszym zadaniem przekonywanie kogokolwiek – my tylko mówimy, że naprawdę były prowadzone profesjonalne pytania mające na celu odpowiedź na to pytanie.

Z drugiej strony, często mamy do czynienia z sytuacją, kiedy błędne założenia nagle dewastują całą ludzką wiedzę o jakimś zagadnieniu – przychodzi do głowy przykład płaskiej Ziemi i wszelkich wniosków, jakie ktoś kiedyś mógł próbować z tego wyciągnąć. I ostatnimi czasy (wiosną 2011 roku) okazało się, że mamy dokładnie taki problem z górami lodowymi. Cały czas bowiem sądzono, że góra lodowa tworzy się „od góry”: pada śnieg, dzwonią sanie, śnieg zamarza, góra lodowa rośnie (naprawdę chciałem, by to się rymowało, ale mi się nie udało [rym w poprzednim nawiasie był zaś zupełnie przypadkowy]). Okazuje się jednak, że również woda pod górą lodową może zamarzać i dołączać się do tejże góry. A to oznacza, że wszystkie modele dotyczące zachowania się gór lodowych, które używały założenia, że góry lodowe tworzą się od góry, można wyrzucić do kosza. Nie możemy już szacować wieku góry lodowej na zasadzie „Co na górze to młodsze, co na dole to starsze", i tak dalej. Może powinniśmy zadzwonić do Dreamworks i zażądać nowej wersji „Epoki lodowcowej", bo może się okazać, że nasze wyobrażenia na ten temat również należy odrzucić...?

No dobrze, ale przecież nauka dała nam tyle dobrego! Ot, choćby koło. Przebywam obecnie w Holandii i ten kraj chyba by nie istniał bez rowerów. Ktoś mądry kiedyś skonstruował rower i cieszmy się, że był on na tyle mądry, że wykoncypował tak wspaniały środek transportu! No dobrze, problem tylko w tym, że... tak naprawdę nikt nie wie, jak taki rower działa – jakim cudem utrzymuje równowagę i jedzie. Pierwsze rowery konstruowano na zasadzie prób i błędów („ten się przewrócił, o, ten jedzie, ten... Ooo, to musiało boleć"), a dzisiejsi producenci nawet nie próbują udawać, że ich rowery projektowane są przez inżynierów by zapewnić maksymalne bezpieczeństwo czy cokolwiek w tym rodzaju – nie, zamiast tego chwalą się oni swą „intuicją i doświadczeniem", dzięki którym możemy siadać na ich nowe wyroby. Bardzo długo wydawało się, że tym, co utrzymuje rower w pionie jest ta sama siła, dzięki której nie przewraca się zakręcony bączek (tzw. efekt żyroskopowy) – w latach siedemdziesiątych jednak ta teoria została obalona przez fizyka Davida Jonesa. Później sądzono, że cała magia tkwi w położeniu przedniego koła względem kierownicy i wykorzystaniu tak zwanego „caster effect". Niestety, w tym roku naukowcy z Cornell skonstruowali dziwaczny typ roweru (na który, oczywiście, nie wsiadłby nikt komu życie miłe), który utrzymuje równowagę pomimo braku efektu żyroskopowego i caster effect. Owszem – pomimo maszynerii równań różniczkowych i całej fizyki, naukowcy nie potrafią wykombinować, jak działa rower.

Wygląda na to, że nauka ogólnie ma jakieś problemy z dyskusjami dotyczącymi utrzymywania równowagi. Innym bowiem „prostym" problemem jest uzasadnienie, dlaczego lód jest śliski. Co jeszcze dziwniejsze, dlaczego zupełnie gładki lód wcale nie jest bardziej śliski niż lód „pofałdowany" – a wręcz przeciwnie. Wielu ludziom długo wydawało się, że ma to coś wspólnego z tym, że woda jako jedna z niewielu substancji rozszerza się przy zamarzaniu; stąd, chodząc po lodzie, „ściskamy" go z powrotem do postaci wody, czyli płynu, czyli czegoś, na czym nie możemy utrzymać równowagi – voila, oto dlaczego lód jest śliski. To wytłumaczenie można nawet znaleźć w niektórych podręcznikach fizyki. Niestety, wyniki eksperymentów mówią, że jest to fałsz – nasze ciała nie są w stanie wywrzeć na tyle dużego ciśnienia na powierzchnię lodu, by stworzyć „wymaganą" warstwę wody. Inna teoria mówi, że na powierzchni lodu cały czas jest cieniuteńka warstewka wody i to ona zmniejsza tarcie i powoduje śliskość – teoria ta ma swoich zwolenników, nie udowodniono jednak, że ta warstwa w jakikolwiek znaczący sposób na tarcie wpływa. No i jest jeszcze eksperyment dr. Miquela Salmerona. W 2002 roku wziął on coś w rodzaju bardzo, bardzo cienkiej igły podłączonej do mnóstwa czujników i przejechał nią po lodzie. Okazało się, że współczynnik tarcia lodu jest... niezwykle wysoki. I właśnie to, jego zdaniem, powoduje śliskość lodu. Podsumujmy: na podstawie eksperymentu wyciągnięto wniosek, że lód jest tak bardzo nie-śliski, że aż jest śliski. Czy tylko mnie się to kojarzy ze zjawiskiem obserwowanym w programowaniu, kiedy jakaś zmienna osiągnie tak dużą wartość, że aż komputer traktuje ją jako liczbę ujemną? Czy to oznacza, że lód jest błędem w programowaniu świata? Czy to oznacza, że wszyscy żyjemy w Matriksie i jedyną drogą ucieczki jest pełne zrozumienie lodu? Kto wie, kto wie...

Tak naprawdę jest, o dziwo, jeszcze jeden argument podtrzymujący tezę, że światu bliżej do komputerowej symulacji niż się nam wydaje. Wiadomo bowiem, że na poziomie atomowym cała nasza fizyka się, kolokwialnie mówiąc, sypie – z tego powodu fizyka kwantowa i fizyka klasyczna to praktycznie rzecz biorąc dwie rozłączne dziedziny. Powstaje naturalne pytanie, dlaczego tak jest. Jednym z możliwych wyjaśnień jest teoria strun, mówiąca, że na poziomie subatomowym wszystko, co istnieje, to struny, a wszystko co my odczuwamy na poziomie „makro” to jedynie odpowiednie wibracje tychże strun. Należy oczywiście pamiętać, że nawet w podręcznikach fizyki kwantowej sami autorzy przyznają, że tego wszystkiego nie rozumieją. W każdym razie, fizyk Craig Hogan z Illinois poszedł o krok dalej. Wyobraźmy sobie te struny – nazwa „struny” od razu przywodzi na myśl proste na płaszczyźnie. Mamy zatem przestrzeń dwuwymiarową. I wyobraźmy sobie, że wszystko, co czujemy, to efekt w jakiś sposób przez tą przestrzeń dwuwymiarową wywołany. Zatem cały nasz wszechświat to pewna projekcja z 2D w 3D. Inaczej: wszystkie informacje, wszystko o naszym wszechświecie jest zakodowane na dwuwymiarowej powierzchni. Trochę jak wszystkie niezbędne informacje bankowe są zakodowane na hologramie na karcie kredytowej. Zapomnijcie o apokaliptycznej wizji z Facetów w Czerni, według której cała cywilizacja ludzka żyje w szafce w szatni jakiejś innej cywilizacji – według niektórych fizyków teoretycznych, wszyscy żyjemy na karcie kredytowej. I obecnie przeznaczono milion dolarów na budowę dwóch holometrów, których zadanie polega na zmierzeniu najmniejszych możliwych odległości w naszym uniwersum... w poszukiwaniu pikseli. Jak przyznaje sam Hogan, jest to ten typ eksperymentu fizycznego, wyniku którego nikt nie jest w stanie przewidzieć.

Czekamy na ów wynik z niecierpliwością i z co najmniej lekkim niepokojem. Oczekiwanie możemy sobie umilić luźną grą w Pasjansa, którego wszyscy znamy z systemów Windows... I który, o dziwo, jest jedną z gier, których cała maszyneria matematycznej teorii gier nie zdołała nawet nadkruszyć – matematycy nie mają zielonego pojęcia, ile jest możliwych do wygrania rozdań kart, jak należy grać, i tak dalej. Obecne szacowania mówią, że mniej więcej osiemdziesiąt procent rozdań da się wygrać – porównajcie to z Waszą własną statystyką wygranych w tej grze. Jak to zatem jest, że nawet Eurobusiness został matematycznie zrozumiany, a Pasjans nie? Jakim cudem wiadomo, że najpierw była kura, a nie wiadomo, jak działa rower? Czy w trylogii braci Wachowskich jest coś więcej, niż się nam wydaje? Polecamy się nad tym zastanowić w wolnej chwili (gdy akurat nie układacie pasjansa).

Niewinny Rosomak

[W miarę bezbolesne wprowadzenie do teorii przestrzeni operatorowych]

Miałem przyjemność uczęszczać podczas studiów na ćwiczenia z analizy matematycznej do dra Erwina Kasparka. Miał niezwykle ciekawą metodę gradacji ważności twierdzeń matematycznych, mianowicie, gdy chciał on naprowadzić studenta, by ten powołał się na właściwe twierdzenie, mówił *To jest twierdzenie z trzema gwiazdkami! Zawołam człowieka z ulicy i ręczę, że on od razu będzie wiedział o jakie twierdzenie tu chodzi!* Co ciekawe, im dłużej student nie mógł wymyślić o jakie twierdzenie chodzi liczba gwiazdek systematycznie rosła! Pamiętam, iż twierdzenie Weierstrassa orzekające, że każda funkcja ciągła na przestrzeni zwartej osiąga swoje kresy miało aż pięć gwiazdek, a więc metodą prostej dedukcji można było wywnioskować, że jest to twierdzenie bardzo ważne. Rzeczywiście, podzielam ten pogląd i niezwykle twierdzenie to sobie cenię.

Załóżmy, że mamy przestrzeń zwartą (Hausdorffa) K, a nawet lepiej, od razu całą algebrę Banacha $C(K)$ funkcji ciągłych na K. W związku z twierdzeniem Weierstrassa powstaje naturalne pytanie: *Jak wyglądają podzbiory L przestrzeni K o tej własności, że $\|f\|_\infty = \max\{|f(z)|\colon z \in L\}$?* (przez $\|f\|_\infty$ rozumiemy normę supremum). Można udowodnić, że część wspólna rodziny zbiorów domkniętych o tej własności również ma tę własność. Obserwacja ta prowadzi do następujących definicji: Niech $\mathscr{A}$ będzie algebrą składającą się z funkcji ograniczonych (niekoniecznie wszystkich) na pewnej przestrzeni topologicznej X (nie zakładamy nic poza tym). Powiemy, że zbiór $S \subseteq X$ jest *brzegiem* algebry $\mathscr{A}$, gdy dla każdej funkcji f z tej algebry istnieje taki $x \in S$ o tej własności, że $\|f\|_\infty = |f(x)|$. Część wspólną wszystkich domkniętych brzegów algebry $\mathscr{A}$ nazwiemy *brzegiem Szyłowa* tej algebry. Skoro zdefiniowaliśmy już nowe pojęcie warto byłoby je nieco przetestować. Pomyślmy na moment o algebrze dyskowej $A(\overline{\mathbb{D}})$, tj. algebrze złożonej z (zespolonych) funkcji ciągłych na domkniętym kole jednostkowym $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leqslant 1\}$, które są analityczne w jego wnętrzu. Tu chwila refleksji: funkcja analityczna w otwartym kole jednostkowym nie musi mieć ciągłego przedłużenia do koła domkniętego (oczywiście, w tym wypadku twierdzenie Tietziego-Urysohna nie stosuje się). Jawnym przykładem może być

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n} \quad (|z| < 1).$$

Wracając do algebry dyskowej, zasada maksimum dla funkcji analitycznych (to twierdzenie z co najmniej trzema gwiazdkami; dla obecnych studentów czwartego roku nawet i z pięcioma!) mówi, że w istocie brzeg (topologiczny) $\partial\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ jest brzegiem w zdefiniowanym wyżej sensie. Nietrudno zauważyć, że okrąg jednostkowy jest brzegiem Szyłowa algebry dyskowej: niech $|z_0| = 1$ oraz dana będzie funkcja $f(z) = \frac{1}{2}(1-\overline{z_0}z)$, która oczywiście jest elementem algebry dyskowej. Mamy $f(z_0) = 1$ oraz $|f(z)| < 1$ w każdym innym punkcie domkniętego koła jednostkowego. Przykład algebry dyskowej wydaje się dobrze motywować nazwę pojęcia brzegu.

Teraz trochę analizy funkcjonalnej. Pomyślmy o przestrzeni zwartej Hausdorffa Ω. Niech $\mathscr{A}$ będzie algebrą funkcyjną, tj. domknietą podalgebrą algebry $C(\Omega)$ wszystkich funkcji ciągłych na Ω (z normą supremum), która zawiera funkcje stałe oraz rozdziela punkty, tj. dla każdej pary różnych punktów $x, y \in \Omega$ istnieje taka funkcja $f \in \mathscr{A}$, że $f(x) \neq f(y)$. Jasne jest, że algebra dyskowa jest algebrą funkcyjną. Niech ponadto $K_{\mathscr{A}} = \{\lambda \in \mathscr{A}^*\colon \lambda(\mathbf{1}_\Omega) = 1\}$. Z twierdzenia Kreina-Milmana wynika, że $K_{\mathscr{A}}$ jest domknięciem w sensie *-słabej topologii zbioru swoich punktów ekstremalnych. Z twierdzeń Hahna-Banacha i Riesza o reprezentacji funkcjonałów ograniczonych na $C(\Omega)$ wynika, że dla każdego $\lambda \in K_{\mathscr{A}}$ istnieje miara probabilistyczna μ na Ω o tej własności, że $\lambda(f) = \int_K f(z)\mu(\mathrm{d}z)$ – miara ta jest nazywana miarą reprezentującą λ (zastosowanie twierdzenia Hahna-Banacha nie zapewnia nam jednak jednoznaczności miary reprezentującej). W przypadku, gdy λ jest punktem ekstremalnym zbioru $K_{\mathscr{A}}$ miarą reprezentującą λ jest po prostu miara Diraca δ_x, skupiona w pewnym punkcie $x \in \Omega$ (oraz jest ona jedyna). Istotnie, niech μ będzie miarą reprezentującą λ. Dla każdego zbioru borelowskiego $E \subseteq \Omega$ dla którego $\mu(E) \notin \{0, 1\}$ mamy $\lambda = \mu(E)\lambda_1 + \mu(\Omega \setminus E)\lambda_2$, gdzie

$$\lambda_1(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E f(z)\mu(\mathrm{d}z) \text{ oraz } \lambda_2(f) = \frac{1}{\mu(\Omega \setminus E)} \int\limits_{\Omega \setminus E} f(z)\mu(\mathrm{d}z)$$

dla każdej funkcji $f \in \mathscr{A}$. Zauważmy, że $\lambda_1, \lambda_2 \in K_{\mathscr{A}}$, ale λ jest punktem ekstremalnym zbioru $K_{\mathscr{A}}$, skąd $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, tj.

$$\int_E f(z)\mu(\mathrm{d}z) = \mu(E) \int_\Omega f(z)\mu(\mathrm{d}z) \quad (f \in \mathscr{A}).$$

Z powyższego więc wynika, że każda funkcja $f \in \mathscr{A}$ jest stała μ-prawie wszędzie, tj. μ musi być deltą Diraca (oraz jest ona jedyna). W szczególności pokazaliśmy również, że spektrum Gelfanda algebry funkcyjnej $\mathscr{A} = C(\Omega)$ pokrywa się z jej brzegiem Szyłowa; pojęcie jest to więc bardziej interesujące w kontekście algebr funkcyjnych, które nie są tej postaci. Mimo tego, zbiór punktów ekstremalnych zbioru $K_{\mathscr{A}}$ w pełni zasługuje na swoją nazwę – jest to tzw. *brzeg Choqueta* algebry $\mathscr{A}$. Zauważmy, że pojęcie brzegu Choqueta można w podobny sposób zdefniować dla każdej (domkniętej) podprzestrzeni liniowej S algebry $C(\Omega)$.

Co w przypadku nieprzemiennym? Czy da się powyżej zastąpić przestrzenie typu $C(\Omega)$ ogólnymi C*-algebrami? Spróbujmy prześledzić ideę amerykańskiego matematyka, Williama Arvesona, który jest doskonale znany matematycznej społeczności na całym świecie (z przykrością chciałbym tu nadmienić, że Bill Arveson – bo pod taką wersją imienia znany był wszystkim – zmarł 15 listopada 2011 w wieku 77 lat w Berkeley w związku z komplikacjami anestezjologicznymi po operacji).

Zanim zaczniemy, zastanówmy się na moment dlaczego w ogóle potrzebny byłby nam *nieprzemienny brzeg Szyłowa*. Sednem twierdzenia spektralnego dla operatorów normalnych (na przestrzeni Hilberta $\mathscr{H}$) jest obserwacja, że najmniejsza C*-algebra z jedynką $C^*(T)$ generowana przez operator normalny T jest przemienna. Prowadzi to do niezwykle użytecznego pojęcia ciągłego rachunku funkcyjnego dla operatora T, które pozwala przenieść teorię funkcji zmiennej zespolonej na widmie $\sigma(T)$ do C*-algebry $C^*(T)$. W przypadku operatorów, które nie są normalne (a przynajmniej nie są ich dość bliskimi krewnymi) sytuacja nie jest już taka prosta. W ogólności nie ma oczywistego związku pomiędzy podalgebrą $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(\mathscr{H})$ (podalgebrą algebry wszystkich ograniczonych operatorów na $\mathscr{H}$), która nie jest zamknięta na inwolucję (krótko: nie jest *samosprzężona*) a C*-algebrą $C^*(\mathscr{A})$ przez nią generowaną. Postaramy się teraz przenieść dyskusję na nawet nieco szerszy grunt, tj. na *przestrzenie operatorowe*.

Głównym naszym obiektem rozważań będą *przestrzenie operatorowe*, tj. domknięte podprzestrzenie liniowe C*-algebr (a więc i $\mathscr{B}(\mathscr{H})$). Oczywiście każda przestrzeń Banacha zanurza się w przestrzeń operatorów na przestrzeni Hilberta – wynika to z zestawienia dwóch faktów: każda przestrzeń Banacha E jest izometryczna z podprzestrzenią przestrzeni $C(K)$, gdzie K jest jednostkową kulą domkniętą przestrzeni E^*, wyposażoną w relatywną

-słabą topologię (jest to twierdzenie Banacha-Mazura). Z drugiej strony, przestrzeń $C(K)$ jest C-algebrą, więc z twierdzenia Gelfanda-Najmarka--Segala wynika, że zanurza się ona w $\mathscr{B}(\mathscr{H})$. Czy więc każda przestrzeń Banacha jest przestrzenią operatorową? I tak i nie. Tak, bo właśnie przed chwilą to uzasadniliśmy. Nie, ponieważ teoria przestrzeni operatorowych nie różniłaby się niczym od teorii przestrzeni Banacha, gdyby myśleć o kategorii przestrzeni operatorowych w której morfizmami są zwykłe ograniczone operatory liniowe (czy nawet tylko kontrakcje). Sednem jest tzw. *całkowita ograniczoność*, ale to już za moment.

Niech S będzie domkniętą podprzestrzenią liniową C*-algebry $\mathscr{A}$ która zawiera jedynkę e tej algebry (odtąd zakładamy, że wszystkie C*-algebry mają jedynki). Odwzorowanie liniowe $\varphi\colon S \to \mathscr{C}$ ($\mathscr{C}$ jest C*-algebrą) nazywane jest *dodatnim*, gdy $\varphi(x)$ jest elementem dodatnim w $\mathscr{C}$ dla każdego dodatniego elementu $x \in \mathscr{A}$ (element $x \in \mathscr{A}$ jest dodatni, gdy jego widmo $\sigma(x)$ jest zawarte w przedziale $[0, \infty)$, w szczególności każdy element dodatni jest samosprzężony). Słynny wynik Kreina mówi, że jeżeli $S = S^*$ (notacja nieco niefortunna w kontekście przestrzeni Banacha), tj. $x^* \in S$ dla każdego $x \in S$, to każde odwzorowanie dodatnie z S ma dodatnie przedłużenie do $\mathscr{A}$. Ale sama dodatniość to często za mało. Zobaczymy, że twierdzenie to można jeszcze nieco ulepszyć. Potrzebujemy jednak dalszych pojęć wstępnych.

Rozważmy algebrę M_n macierzy zespolonych stopnia n. Iloczyn tensorowy $\mathscr{A} \otimes M_n$ można utożsamić z *-algebrą macierzy stopnia n o współczynnikach z $\mathscr{A}$ oraz $S \otimes M_n$ z jej podprzestrzenią liniową. W $\mathscr{A} \otimes M_n$ można wprowadzić tylko na jeden sposób normę wraz z którą ta *-algebra staje się C*-algebrą, więc nie wahajmy się tego zrobić. W szczególności, $S \otimes M_n$ jest teraz domkniętą podprzestrzenią liniową $\mathscr{A} \otimes M_n$. Niech $\varphi\colon S \to \mathscr{C}$ będzie przekształceniem liniowym o wartościach w C*-algebrze. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ definiujemy odwzorowanie

$$\varphi_n \colon S \otimes M_n \to \mathscr{C} \otimes M_n$$

wzorem

$$\varphi_n\left([a_{ij}]_{i,j\leqslant n}\right) = [\varphi(a_{ij})]_{i,j\leqslant n} \quad ([a_{ij}]_{i,j\leqslant n} \in S \otimes M_n).$$

Powiemy, że odwzorowanie φ jest

1. *całkowicie ograniczone*, gdy $\sup \|\varphi_n\| < \infty$,
2. *całkowicie kontraktywne*, gdy $\|\varphi_n\| \leqslant 1$ dla każdego n,
3. *całkowicie dodatnie*, gdy każde odzwzorowanie φ_n jest dodatnie.

To właśnie przymiotnik *całkowicie* odróżnia teorię przestrzeni Banacha z operatorami ograniczonymi/kontrakcjami od teorii przestrzeni operatorowych z operatorami całkowicie ograniczonymi/całkowicie kontraktywnymi.

Odwzorowania φ_n stowarzyszone z operatorem φ na przestrzeni operatorowej odpowiadają za „sposób włożenia” danej przestrzeni operatorowej w C*-algebrę (czyli w istocie w $\mathscr{B}(\mathscr{H})$) – mówiąc obrazowo – same operatory ograniczone wydają się być na to głuche.

Arveson uogólnił wsponiane wcześniej twierdzenie Kreina zastępując dodatniość całkowitą dodatnością[2], a więc niejako dostosował je do kontekstu przestrzeni operatorowych. Zaskakujące może być, że użył do tego pomysłów nawiązujących do... brzegu Choqueta!

Przez *reprezentację* C*-algebry $\mathscr{A}$ rozumiemy parę $(\pi, \mathscr{H})$, gdzie $\pi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ jest *-homomorfizmem algebr (często jednak skracamy notację pisząc „reprezentacja π”). Reprezentacja π jest *nieprzywiedlna*, jeżeli jest niezerowa oraz dla każdego $x \in \mathscr{A}$ operator $\pi(x)$ nie komutuje z nietrywialnym rzutem ortogonalnym na $\mathscr{H}$. Nieprzywiedlną reprezentację π nazwiemy brzegową względem S, gdy jedynym całkowicie dodatnim rozszerzeniem $\pi|_S$ do $\mathscr{A}$ jest π. W przypadku, gdy $S \subseteq \mathscr{A} = C(\Omega)$, reprezentacje brzegowe względem S odpowiadają punktom brzegu Choqueta S. Arveson wykazał również następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Niech $S_1 \subseteq \mathscr{A}_1, S_2 \subseteq \mathscr{A}_2$ będą przestrzeniami operatorowymi, które zawierają jedynki algebr w których są zawarte, tj. odpowiednio e_1 i e_2. Ponadto, załóżmy, że $\mathscr{A}_i = C^*(S_i)$, $i = 1, 2$.*

Jeżeli $\varphi\colon S_1 \to S_2$ jest odwzorowaniem liniowym całkowicie kontraktywnym, które zachowuje jedynki, tj. $\varphi(e_1) = e_2$, to dla każdej reprezentacji brzegowej π algebry $\mathscr{A}_1$ względem S_1 istnieje (wyznaczona jednoznacznie) reprezentacja brzegowa π' algebry $\mathscr{A}_2$ względem S_2 o tej własności, że

$$\pi'(\varphi(x)) = \pi(x) \quad (x \in S_1).$$

Zakładając w powyższym twierdzeniu dodatkowo, że część wspólna jąder reprezentacji brzegowych A_i względem S_i $(i = 1, 2)$ jest trywialna, odwzorowanie φ wyznaczone jest jednoznacznie jako obcięcie pewnego *-izomorfizmu algebr $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ do S_1, a więc bardzo porządnego odwzorowania. Jest to bardzo podobna sytuacja do tej jaką widzieliśmy na przykładzie brzegu Szyłowa algebry funkcyjnej (tj. obcinania funkcji do podzbiorów zbioru Ω, tak by norma elementów algebry funkcyjnej została zachowana).

[2]Niektórym Czytelnikom wspomiane twierdzenie Kreina i jego uogólnienie przywodzi na myśl twierdzenie Hahna-Banacha. Jest to trafne skojarzenie, mimo że klasyczne twierdzenie Hahna-Banacha nie odwołuje się do dodatniości. Twierdzenie Hahna-Banacha ma jednak swoją dla przestrzeni operatorowych – jest to tzw. twierdzenie Hahna-Banacha-Arvesona-Wittstocka. Mówi ono, że każde całkowicie ograniczone odwzorowanie z podprzestrzeni V przestrzeni operatorowej W o wartościach w $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ można przedłużyć do odwzorowania całkowicie ograniczonego na V z zachowaniem cb-normy.

Trzeba jednak przyznać, że teoria przestrzeni operatorowych ma nieco inne korzenie i nie wyrosła z naśladowania brzegu Choqueta czy Szyłowa, powiedzmy, że jest to moja autorska wariacja na temat.

Teoria przestrzeni operatorowych zaczęła rozkwitać w latach osiemdziesiątych XX wieku wraz z udowodnieniem przez Ruana twierdzenia utożsamiającego abstrakcyjne przestrzenie operatorowe (o których tutaj nie wspomnieliśmy) z przestrzeniami operatorowymi we wspomnianym przez nas sensie – stan ten trwa do dziś. Wydaje się, że z każdą chwilą teoria ta nabiera coraz większego impetu. Przyczyn może być kilka – morfizmy w kategorii przestrzeni operatorowych są dużo subtelniejsze niż morfizmy w kategorii przestrzeni Banacha do których przywykliśmy, ale też dostatecznie ogólne by teoria była bogata i *samowystarczalna*. Intuicje w tej teorii pochodzą zarówno z klasycznej teorii operatorów jak i teorii przestrzeni Banacha (wszak o każdej przestrzeni Banacha można myśleć na co najmniej kilka sposobów jako o przestrzeni operatorowej). Nie jest to jednak ślepe naśladownictwo teorii przestrzeni Banacha, gdyż fundamentalne pytania w teorii przestrzeni operatorowych są mimo wszystko inne i nie mniej ciekawe (a liczba gwiazdek przy twierdzeniach tej teorii nie odstaje od średniej dla innych klasycznych teorii matematycznych).

[Literatura]

[1] W. B. Arveson, *An invitation to C*-algebras*, Springer-Verlag, New York, 1976

[2] W. B. Arveson, „Subalgebras of C*-algebras", *Acta Math.* 123 (1969), 141–224.

[3] W. B. Arveson, „Subalgebras of C*-algebras II", *Acta Math.* 128 (1972), 271–308

[4] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[5] E. G. Effros, Z. J. Ruan, *Operator Spaces*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2000

[6] E. Kaniuth, *A Course in Commutative Banach Algebras*. Graduate Texts in Mathematics Volume 246, Springer, 2009.

[7] T. W. Palmer, *Banach algebras and the general theory of *-algebras I*, Encycl. Math. Appl., 49, Cambridge Univ. Press, 1994.

[8] G. Pisier, *Introduction to operator space theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 294, Cambridge University Press, Cambridge, 2003

Tomek Kania (t.kania@lancaster.ac.uk)

Autor artykułu jest absolwentem studiów matematycznych w Uniwersytecie Śląskim; obecnie słuchaczem studiów doktoranckich w Lancaster University.

[Mały słownik człowieka średnio wykształconego]

Kilka, a może już nawet kilkanaście lat temu, na stronie internetowej jednego z wykładowców Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach pojawił się „Mały słownik człowieka średnio wykształconego". Jego autor w nie do końca poważny, czasem nieco złośliwy sposób zwracał uwagę na masowo powtarzające się w pracach i wypowiedziach studenckich niedoskonałości. Ze względu na ironiczny i dowcipny język „Mały słownik..." bardzo szybko wzbudził furorę. Jego autor – doktor Marek Szyjewski – to algebraik, postać owiana legendą w Instytucie Matematyki UŚ, gdzie wykładał. Był również opiekunem Koła Naukowego Matematyków UŚ. Zauważyliśmy, że wśród nowych pokoleń studentów Instytutu Matematyki UŚ „Słownik..." nie jest już tak znany – a szkoda! Stąd też pomysł, by o jego istnieniu przypomnieć. Poniżej prezentujemy wybrane hasła; cały „Słownik..." można znaleźć w Internecie.

Redakcja [Macierzatora] pragnie serdecznie podziękować Panu Doktorowi Markowi Szyjewskiemu za wyrażenie zgody na przedruk fragmentów „Małego słownika człowieka średnio wykształconego" oraz za bardzo miłe i życzliwe odniesienie się do pomysłu opisania go w [Macierzatorze].

> *„...*
> *— A po co ja się właściwie tej Mowy uczę, co?*
> *— Po to, żeby ją poznać. Tego, czego się nie zna wypada się uczyć. Ten, kto nie zna języków, jest kaleką.*
> *— Wszyscy i tak mówią wspólnym!*
> *— Fakt. Ale niektórzy nie tylko. Zaręczam ci, Ciri, że lepiej zaliczać się do niektórych niż do wszystkich."*
>
> A. Sapkowski, „*Krew elfów*"

ad (łac.) do; odsyłacz: ad 1. (*ad primum*) – do pierwszego; ad 2. (*ad secundum*) – do drugiego, itd. *Per aspera ad astra* – przez trudy do gwiazd.
Uwaga! „Po **ad** nie stawia się kropki, gdyż słowo to nie jest skrótem, lecz łacińskim przyimkiem o znaczeniu **do**" (M. Bańko, M. Krajewska „*Słownik wyrazów kłopotliwych*"; PWN Warszawa 1994).
W amerykańskim angielskim 'ad' oznacza reklamę, ogłoszenie (skrót od *advertisement*, bez kropki).

adekwatny „odpowiedni, zgodny, przystosowany, ściśle dopasowany. – łac. *adaequatus* p.p. od *adaequare* ‘zrównać’ ” (W. Kopaliński „*Słownik wyrazów obcych i zwrotów obcojęzycznych*”, wyd. XIII, WP Warszawa 1983). Słowo *ad* **nie jest** skrótem od „adekwatnie”, w ogóle nie jest skrótem.

adn. tak wyglądałby skrót słowa „adnotacja” utworzony zgodnie z zasadami polskiej ortografii, gdyby komukolwiek taki skrót kiedykolwiek do czegokolwiek był potrzebny.

adnotacja „uwaga, dopisek, przypis, notatka, krótka informacja (np. bibliograficzna); *ad notam* (łac.) do wiadomości” (W. Kopaliński „*Słownik wyrazów obcych i zwrotów obcojęzycznych*”, wyd. XIII, WP Warszawa 1983). W szczególności rozwiązania zadania egzaminacyjnego nie można nazwać adnotacją; dopisek sprawdzającego typu „nonsens!” albo „ort.” jest przykładem adnotacji.

$\mathbf{b^2 - 4ac}$ wzór na wyróżnik (nie: deltę) trójmianu kwadratowego

$$ax^2 + bx + c.$$

delta nazwa czwartej litery alfabetu greckiego δ, Δ.

Uwaga! To, że wartość wyróżnika trójmianu kwadratowego zwykle oznacza się literą Δ nie oznacza, że słowo „delta” jest nazwą wyróżnika. Słowo „delta” jest nazwą typu ujścia rzeki i typu płatowca samolotu. Natomiast słowo „delta” **nie jest** nazwą wzoru na pierwiastki trójmianu kwadratowego ani metody obliczania tych pierwiastków.

oczywistość

1. matematyk mówi „to jest oczywiste” gdy umie bez namysłu podać krótki i łatwy dowód tego, co nazywa oczywistym;
2. niematematyk mówi „to jest oczywiste” gdy nie ma pojęcia, jak to uzasadnić, ale wierzy, że to jest prawdą.

posiadać „[Czasownik nadużywany, często błędnie stosowany zamiast mieć, np. »Czy pan ma bilet« (a nie: posiada), »samochód ma (a nie posiada) cztery koła«]

1. mieć jakąś rzecz (ziemię, nieruchomość, pieniądze, przedmiot) w swym władaniu, być właścicielem czego, mieć: »Posiadać duży plac budowlany, plantację tytoniu.«
2. w połączeniu z rzeczownikiem oznaczającym wiadomości, umiejętność: mieć, umieć opanować co, być wyćwiczonym w czym: »Posiadać rozległą wiedzę.« »Posiąść tajniki rzemiosł.« ”

(S. Skorupka i in. (red.) „*Mały słownik języka polskiego*", PWN Warszawa 1969).
Równanie ma rozwiązania lub nie ma rozwiązań, ale na pewno nie posiada rozwiązań, bo nie może okazać notarialnego aktu własności.

postać – budowa wyrażenia, typ wzoru ogólnego. Na przykład: „x jest postaci $a + b$" oznacza, że x jest sumą dwóch składników; liczba nieparzysta to liczba postaci $2k-1$ dla całkowitych k, każda liczba pierwsza postaci $4k + 1$ i liczba 2 to wszystkie liczby pierwsze postaci $x^2 + y^2$, itd. Nie mówimy: „$2 \cdot 2$ jest postaci 4", mówimy „$2 \cdot 2$ jest równe 4", „$2 \cdot 2$ równa się 4".

rozumienie wbrew nowej modzie językowej „rozumieć" **nie jest** antonimem „wiedzieć, umieć". Nie można rozumieć tego, czego się nie wie. „Cztery są stopnie przyswojenia reguły:

1. uczący się wyuczył się reguły na pamięć, przyjąwszy ją na wiarę; jednakże jest w stanie korzystać z niej, poprawnie stosując ją w praktyce (stadium mechanicznego przyswojenia);
2. uczący się wypróbował regułę w najprostszych przypadkach, w których, jak się przekonał, daje ona poprawny rezultat (stadium indukcyjnego rozumienia);
3. uczący się zrozumiał dowód reguły (stadium świadomego zrozumienia);
4. uczący się w pełni przyswoił sobie regę i tak jest jej pewien, że nie pozostał o w nim śladu wątpliwości co do jej prawdziwości (stadium wewnętrznego rozumienia)"

(B. Spinoza „*Tractatus de Intellectus Emandatione*"; cytat i nazwy poziomów – za: G. Polya, „*Mathematical discovery*", John Wiley & Sons Inc. NY - London 1962). Wydaje się, że można dodać jeszcze dwa stopnie:

5. uczący się widzi, które twierdzenia i w jakim stopniu wykorzystują dane twierdzenie, a także widzi do jakich sprzeczności doprowadziłaby nieprawdziwość twierdzenia; umie odróżnić rolę różnych założeń i pokazać na przykładach, że są one niezbędne; umie rozpoznać możliwe zastosowania twierdzenia i poznać sytuacje, w których zastosowanie twierdzenia nie da rezultatów;
6. uczący się umie obejść się bez użycia twierdzenia osiągając te same albo lepsze rezultaty łatwiej i szybciej.

Osoby, które uznają tylko następujące stopnie:

–1. nic

0. zapamiętanie zapisu twierdzenia, dowodu, rozumowania tak, aby wyrecytować zapis bez większych pomyłek i luk

nie mają nic wspólnego ani z rozumieniem, ani z uczeniem się i tutaj są na niewłaściwym miejscu.

równość zbiorów W teorii mnogości równość podstawowych obiektów (czyli zbiorów) definiuje się za pomocą relacji należenia $\in$. Definicja jest następująca:

$$A = B \Leftrightarrow \forall_x [x \in A \Leftrightarrow x \in B].$$

Uwaga! Często powtarzane „poglądowe” sformułowanie – „zbiory są równe gdy mają te same elementy” – nie nadaje się na definicję, bo nie daje sposobu sprawdzania, czy równość zbiorów zachodzi. Na przykład gdy trzeba sprawdzić równość $\{0, 1\} = \{1, 0\}$, powstaje problem: czy 0 i 1 są „te same”? Kiedy należy zakończyć sprawdzanie, czy elementy są „te same”? Natomiast definicja równości nie sprawia takich problemów: oba zdania $x \in \{0, 1\}$ i $x \in \{1, 0\}$ są prawdziwe gdy $x = 0$ i gdy $x = 1$, oraz oba są fałszywe, gdy $x \neq 0 \wedge x \neq 1$.

układ współrzędnych na płaszczyźnie w geometrii euklidesowej – układ dwóch osi liczbowych wzajemnie do siebie prostopadłych i mających wspólny początek (podręcznik matematyki do VII klasy szkoły podstawowej).

Kartezjusz zauważył, że prosta konstrukcja geometryczna na płaszczyźnie z wybranym układem współrzędnych pozwala przyporządkować każdemu punktowi płaszczyzny uporządkowaną parę liczb rzeczywistych, co określa wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru punktów płaszczyzny na zbiór $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ uporządkowanych par liczb rzeczywistych.

Osie układu współrzędnych nazywamy odpowiednio osią odciętych i osią rzędnych; ich punkt przecięcia jest punktem 0 każdej z osi.
Konstrukcja polega na przeprowadzeniu przez dany punkt prostych równoległych do każdej z osi; punkt przecięcia z drugą osią wyznacza współrzędną: punkt przecięcia z osią odciętych – pierwszą współrzędną, a punkt przecięcia z osią rzędnych – drugą współrzędną danego punktu.

Ogólnie układem współrzędnych nazywamy „różnowartościowe odwzorowanie przyporządkowujące punktom zbioru, np. prostej, płaszczyzny lub przestrzeni, ciągi liczb nazywane współrzędnymi tych punktów w danym układzie współrzędnych.” (W. Waliszewski i in. (red.), „*Encyklopedia szkolna. Matematyka*”, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1988). Często używane układy współrzędnych mają nazwy własne, np.: kartezjański układ współrzędnych, układ współrzędnych biegunowych, układ współrzędnych walcowych, układ współrzędnych sferycznych.

Układ współrzędnych służy do przyporządkowania punktom ciągów liczb. Układ współrzędnych **nie** służy do zaznaczania punktów – do tej czynności służy ołówek.

zad u zwierząt: tylna część ciała, pośladki : „ciągnął lejce, aż konie siadły na zadach” (S. Skorupka i in. (red.) „*Mały słownik języka polskiego*”, PWN Warszawa 1969).

zad. skrót używany przez osoby, dla których napisanie siedmioliterowego słowa „zadanie” jest zbyt trudne lub bardzo męczące (np. przez uczniów pierwszej klasy szkoły podstawowej).

zaznaczanie punktu czynność przy wykonywaniu rysunku. Do zaznaczania punktu służy ołówek (kreda, długopis itd.), a nie układ współrzędnych. Punkt płaszczyzny nie zmienia się w czasie zaznaczania go na rysunku: jest taki sam przed i po zaznaczeniu.

[Ogłoszenia KNM]

Na stronie internetowej Koła Naukowego Matematyków UŚ można znaleźć wiele materiałów związanych z naukową działalnością koła: dziesiątki skryptów, setki godzin nagranych wykładów oraz tysiące zdjęć. Nagrania wszelkich wykładów były dotychczas, ze względu na ogromną objętość oryginalnych plików (około 4 GB na każdą godzinę nagrania), umieszczane na stronie Koła w wersji skompresowanej, a przez to i o wiele gorszej jakości. Od teraz dodawać będziemy nagrania w obydwu wersjach: skompresowanej oraz oryginalnej. Dodaliśmy również nieskompresowane nagrania wielu wykładów z obecnego i ubiegłego roku akademickiego. Serdecznie zachęcamy do oglądania!

Niektóre nagrania i skrypty widoczne są tylko po zalogowaniu. Osoby, które chciałyby mieć do nich dostęp, proszę o kontakt pod adresem mailowym `j.zwierzynska@knm.katowice.pl` lub osobiście w pokoju Koła Naukowego Matematyków (524 w Instytutcie Matematyki UŚ).

[Zbiórka Mikołajkowa]

Szanowni Państwo,

pragniemy serdecznie podziękować Państwu za ogromne zaangażowanie w tegoroczną zbiórkę mikołajkową, organizowaną jak co roku przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach na terenie Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii UŚ.

Bardzo serdecznie dziękujemy wszystkim, którzy się w tę zbiórkę włączyli – ilość zebranych darów przekroczyła nasze najśmielsze oczekiwania! Miło nam poinformować, że w tym roku zebraliśmy najwięcej różnego rodzaju upominków w historii.

Wszystkie dary zostały przekazane opiekunom katowickiej świetlicy św. Wojciecha, która działa pod patronatem Caritasu. Gorąco, gorąco dziękujemy w imieniu jej podopiecznych oraz wychowawców. Dary zostały już zawiezione do świetlicy i tam czekają na Święta; wręczą je tuż przed nimi osobiście członkowie Koła.



Dziękując raz jeszcze za okazaną hojność, życzymy Państwu dobrych, spokojnych Świąt –

Koło Naukowe Matematyków UŚ

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Mateusz Jurczyński, Tomasz Kania, Beata Łojan, Mikołaj Stańczyk, dr Marek Szyjewski, Paweł Zwoleński
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

`macierzator@knm.katowice.pl`.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`.
Wydanie elektroniczne [Macierzatora] posiada numer ISSN: 2083-9774.

grudzień 2011

[Kącik TEXowy część 5]

Matematyka — podstawowe informacje

Czas zająć się tym z czym TEX radzi sobie najlepiej, czyli składaniem wszelkiego rodzaju wzorów matematycznych, fizycznych itp. Na początek kilka podstawowych informacji — tryb matematyczny, podstawowe pakiety, matematyczne kroje pisma oraz symbole matematyczne.

Beata Łojan (b.lojan@knm.katowice.pl)

[Tryb matematyczny]

Do tej pory poznaliśmy sposoby wpisywania i formatowania zwykłego tekstu. Jak już wiemy LaTeX świetnie radzi sobie również ze składaniem tekstu matematycznego — chcąc wpisywać wyrażenia matematyczne musimy to jednak jakoś zasygnalizować LaTeXowi, aby wiedział jak interpretować nasze polecenia. Służy do tego tzw. *tryb matematyczny*. Wszelkiego rodzaju wzory, które chcemy umieścić w tekście wpisujemy między symbole $ i $. Natomiast dłuższe wzory lub takie, które chcemy wyeksponować, umieszczamy w `\[ ... \]`. Możemy również skorzystać ze środowiska `equation` — wówczas wzory będą numerowane lub z `equation*` – wzory nie będą numerowane podobnie jak w `\[ ... \]`[3].

tryb mat.tex

```
Niech $a,b\in\mathds{Z}$, $b\not = 0$. Mówimy, że $a$ jest \emph{podzielne
z resztą} przez $b$ jeśli istnieją takie liczby $q,r\in\mathds{Z}$, że
$$a = bq + r, \text{ gdzie } 0 \leq r <|b|.$$
```

tryb mat.pdf

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Mówimy, że a jest *podzielne z resztą* przez b jeśli istnieją takie liczby $q, r \in \mathbb{Z}$, że
$$a = bq + r, \text{ gdzie } 0 \leqslant r < |b|.$$

Należy zwrócić uwagę na różnice między trybem tekstowym, którego używaliśmy do tej pory, a trybem matematycznym. W przypadku trybu matematycznego LaTeX ignoruje wszelkie znaki odstępu i końca linii. Wszystkie wynikają albo z kontekstu, albo należy je wstawić za pomocą odpowiedniej intrukcji np. `\quad`. Nie jest również możliwe podzielenie wzoru na akapity. Ponadto symbole matematyczne, zmienne itp. składane są inaczej niż zwykły tekst, jeśli więc częścią wzoru ma być zwykły tekst należy użyć instrukcji `\textrm{...}` lub `\text{...}`.

[Pakiety amsmath, amssymb, amsfonts]

Jak oczywiście wiadomo kreatywność i dbałość matematyków w doborze oznaczeń jest nieograniczona. Początkującemu użytkownikowi na pewno wystarczą symbole i środowiska matematyczne służące do składu wzorów z pakietów `amsmath`, `amssymb`[4], `amsfonts`; dostępnych jest jednak wiele innych pakietów, które dostarczają bardziej „wyszukanych” symboli.

[3] Inne rzadziej używane sposoby wprowadzania wyrażeń matematycznych: `\(...\)`, `\begin{math} ... \end{math}`, `\begin{displaymath}...\end{displaymath}`

[4] Pakiet `amssymb` należy umieścić w preambule przed pakietem `babel`.

Wiekszość poleceń matematycznych odnosi się tylko do pierwszego znaku występującego bezpośrednio po nim. Jeśli chcemy by jakieś polecenie objęło swym działaniem większą grupę znaków, to należy je umieścić wewnątrz nawiasów klamrowych.

Matematyczne kroje i stopnie pisma. Pisząc wzory matematyczne, często używamy symboli literowych, które składamy niestandarodwymi krojami pisma. Przykładem mogą być oznaczenia zbiorów liczbowych: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Przy składaniu tego typu symboli możemy skorzystać z dostępnych matematycznych krojów pisma.

Polecenie	Efekt	Pakiet
`\mathrm`	$\mathrm{ABCdef123}$	
`\mathit`	$\mathit{ABCdef123}$	
`\mathbf`	$\mathbf{ABCdef123}$	
`\mathnormal`	$\mathnormal{ABCdef123}$	
`\mathcal`	$\mathcal{ABC}$	
`\mathscr`	$\mathscr{ABC}$	`mathscr`
`\mathcal`	$\mathcal{ABC}$	`calrsfs`
`\mathcal`	$\mathcal{ABC}$	`euscript` z opcją `mathcal`
`\mathscr`	$\mathscr{ABC}$	`euscript` z opcją `mathscr`
`\mathbb`	$\mathbb{ABC}$	`amsfonts`, `amssymb`
`\mathbbm`	$\mathbbm{ABCdef12}$	`bbm`
`\mathbbmss`	$\mathbbmss{ABCdef12}$	`bbm`
`\mathbbmtt`	$\mathbbmtt{ABCdef12}$	`bbm`
`\mathds`	$\mathds{ABC1}$	`dsfont`
`\mathds`	$\mathds{ABC1}$	`dsfont` z opcją `sans`
`\mathfrak`	$\mathfrak{ABCdef123}$	`amsfonts`, `eufrak`
`\textfrak`	ABCdef123	`yfonts`
`\textgoth`	ABCdef123	`yfonts`
`\textswab`	ABCdef123	`yfonts`

Tabela 5.1: Matematyczne kroje pisma

Trzech ostatnich poleceń (z pakietu `yfonts`) wymienionych w tabeli (5.1) używamy poza trybem matematycznym.

Oprócz wymienionych w tabeli (5.1) dostępne są również polecenia: `\pmb` oraz `\boldsymbol` do tworzenia symboli półgrubych. Zauważmy, że korzystając z instrukcji `\mathbf` uzyskamy odmianę półgrubą, jednak nie będzie to półgruba kursywa, którą zwykle składane są wzory matematyczne.

Za pomocą odpowiednich instrukcji możemy również wpływać na wielkość poszczególnych elementów w trybie matematycznym. Standardowo stopień pisma dobierany jest automatycznie, w zależności od kontekstu; przykładowo indeksy są składane mniejszą czcionką. W trybie matematycznym do zmiany stopnia pisma możemy korzystać z czterech poleceń:

❶ `\displaystyle{ABC123}` — $\displaystyle ABC123$;
❷ `\texstyle{ABC123}` — $\textstyle ABC123$;
❸ `\scriptstyle{ABC123}` — $\scriptstyle ABC123$;
❹ `\scriptscriptstyle{ABC123}` — $\scriptscriptstyle ABC123$;

Konstrukcje ułamkopodobne. Do wprowadzania ułamków i wszelkich innych „tworów” ułamkopodobnych służy nam polecenie `\genfrac`:

```
\genfrac{l_ogran}{p_ogran}{grubość_linii}{styl}{licznik}{mianownik}
```

gdzie pierwsze dwa parametry określają czym ma zostać „ograniczony” ułamek (jakim nawiasem), `grubość_linii` określa grubość linii między licznikiem a mianownikiem ułamka oraz `styl` określa wielkość ułamka i może przyjmować wartości 0–3 (0 – `displaystyle`, 1 – `textstyle`, 2 – `scriptstyle`, 3 – `scriptscriptstyle`).

Oczywiście stosowanie tak długiego polecenia byłoby bardzo niewygodne, dlatego też dostępne są skrócone wersje dla najczęściej używanych konstrukcji: polecenie `\frac{licz}{mian}` — do tworzenia standardowych ułamków oraz `\binom{licz}{mian}` — do tworzenia symbolu dwumianu Newtona.

ułamki.tex

```
\frac{a}{b};
\binom{n}{k};
\genfrac{[}{\}}{2pt}{}{ABC}{123};
```

ułamki.pdf

$$\frac{a}{b}; \quad \binom{n}{k}; \quad \genfrac{[}{\}}{2pt}{}{ABC}{123};$$

Dodatkowo polecenie `\frac` posiada dwie wersje `\tfrac` i `\dfrac`, które są odpowiednio skrótami instrukcji `\textstyle\frac` i `\displaystyle\frac`. Analogiczne instrukcje zdefiniowane są dla `\binom` — `\tbinom` i `\dbinom`. Ponadto do tworzenia ułamków piętrowych mamy polecenie `\cfrac`:

ułamki2.tex

```
\begin{equation*}
\cfrac{1}{\sqrt{2}+
\cfrac{1}{\sqrt{2}+
\cfrac{1}{\dotsb }}}
\end{equation*}
```

ułamki2.pdf

$$\cfrac{1}{\sqrt{2}+\cfrac{1}{\sqrt{2}+\cfrac{1}{\dotsb }}}$$

Indeksy. Do tworzenia indeksów$_{\text{dolnych}}$ i indeksów$^{\text{górnych}}$ służą nam odpowiednio _ i ^. Możemy je dowolnie zagnieżdżać — pamiętając przy tym o odpowiednim grupowaniu. Istnieje również polecenie pozwalające umieścić indeksy we wszystkich „rogach” symbolu $\sum$ czy $\prod$ — `\sideset{lewa}{prawa}`.

indeksy.tex

```
$x_n^2$ $x^{y^2}_{i_{j_6}}$
$\sideset{_a^b}{_c^d}\prod$
$\sideset{_a^b}{_c^d}\sum$
```

indeksy.pdf

x_n^2 $x^{y^2}_{i_{j_6}}$ $\sideset{_a^b}{_c^d}\prod$ $\sideset{_a^b}{_c^d}\sum$

Pierwiastek. Za pomocą instrukcji `\sqrt[n]{a}` otrzymujemy symbol pierwiastka n-tego stopnia z a. Pierwszy argument, który jest nieobowiązkowy, oznacza stopień pierwiastka, a drugi, to co ma znaleźć się pod pierwiastkiem. Ponadto możemy „sterować” położeniem „n” względem pierwiastka za pomocą instrukcji `\leftroot` i `\uproot`.

pierwiastki.tex

```
\sqrt{x^2-1}
\sqrt[4]{81}=3
\sqrt[\leftroot{-5}\uproot{5}n]{x}
```

pierwiastki.pdf

$$\sqrt{x^2-1} \quad \sqrt[4]{81}=3 \quad \sqrt[n]{x}$$

Granica, suma, całka i iloczyn. Granice zapisujemy w tekście za pomocą instrukcji `\lim_{...}`. Zdefiniowane są również polecenia dla granic częściowych: `\limsup` i `\liminf`.

Symbole sumy, całki i iloczynu otrzymujemy odpowiednio za pomocą poleceń: `\sum`, `\int`, `\prod`. Górne i dolne granice całkowania czy sumowania określamy odpowiednio za pomocą `^` i `_`.

wzory.tex

```
To kilka przykładowych wzorów: granica  $\lim_{n\rightarrow\infty}
\sqrt{n^4+6}$, symbol sumy $\sum_{n=1}^{infty} \frac{1}{n}$ czy całki
$\int_2^4 x^2 \mathrm{d}x$. Zauważmy, że wzory w tekście różnią się od tych
eksponowanych: $$\lim_{n\rightarrow\infty} \sqrt{n^4+6}; \quad
sum_{n=1}^{infty} \frac{1}{n}; \quad  \int_2^4 x^2 \mathrm{d}x $$
```

wzory.pdf

To kilka przykładowych wzorów: granica $\lim_{n\rightarrow\infty}\sqrt{n^4+6}$, symbol sumy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ czy całki $\int_2^4 x^2\mathrm{d}x$. Zauważmy, że wzory w tekście różnią się od tych eksponowanych:

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\sqrt{n^4+6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}; \quad \int_2^4 x^2\mathrm{d}x$$

Wielolinijkowe indeksy. Za pomocą polecenia `\limits` możemy umieścić granice całkowania, sumowania itp. pod i nad symbolem. Polecenie to umieszczamy bezpośrednio po symbolu, do którego ma się odnościć. Należy zwrócić uwagę, że w przypadku skorzystania z tej instrukcji w trybie tekstowym, następuje zwiększenie interlinii.

limits.tex

```
To kilka przykładowych wzorów z użyciem polecenia \limits:
granica $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\sqrt{n^4+6}$
symbol sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
czy całki $\int\limits_2^4 x^2 \mathrm{d}x$.
```

limits.pdf

To kilka przykładowych wzorów z użyciem polecenia `\limits`: granica $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\sqrt{n^4+6}$ symbol sumy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ czy całki $\int\limits_2^4 x^2\mathrm{d}x$.

Czasami wskaźniki, które chcemy umieścić pod (nad) symbolem są długie lub jest ich kilka. Wówczas korzystając z instrukcji `\substack` lub środowiska `subarray` otrzymamy pożądany efekt:

substack.tex

```
\begin{equation}\sum_{{\substack{i=1\\j=1}}}^{\infty} \end{equation}
```

❀ ❀ ❀