[MACIERZATOR43]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

Rys.: Anna Jacek, *Sesja za pasem*

Witamy w styczniowym numerze [MACIERZATORa]!

Oddajemy w Państwa ręce pierwszy w nowym roku kalendarzowym numer naszego miesięcznika. Na początek, w ramach kontynuacji rozważań z poprzednich *Impresji olimpijskich*, zajmiemy się analizą lematu Steinitza – ważnego twierdzenia z geometrii kombinatorycznej. Następnie proponujemy Państwu opowieść o rosyjskiej matematyczce Zofii Kowalewskiej, znanej z osiągnięć na polu równań różniczkowych i mechaniki oraz biografię niemieckiego algebraika Ernsta Witta; publikujemy również polemikę z grudniowym artykułem o Hypatii. W numerze znajdą Państwo także felieton o możliwościach ludzkiego umysłu i niespodziankach, jakich dostarcza nam pamięć oraz kolejną część *Kącika TEXowego*, w którym opowiemy o kolejnych przydatnych poleceniach matematycznych.

Wszystkiego dobrego na cały rok 2012 –

Redakcja

ISSN 2083-9774

[Impresje olimpijskie]

Lemat Steinitza

Zgodnie z zapowiedzią, w tym odcinku zajmiemy się lematem Steinitza. Jest to piękny wynik geometrii kombinatorycznej, a jego dowód – ten, który tu zaprezentujemy i który pochodzi od Bárány'ego i Grinberga, stanowi doskonałą ilustrację potęgi liniowej zależności.

Ernst Steinitz urodził się w 1871 r. na terenie dzisiejszych Siemianowic Śląskich, a wówczas – niemieckiego Laurahütte. Będąc młodzieńcem, przez 13 lat uczył się gry na fortepianie i kompozycji; stworzył wiele sonat oraz jedno trio fortepianowe. Był słusznie bardzo wysoko ceniony przez współczesnych mu matematyków. Sam David Hilbert pisał niejednokrotnie w jego sprawie listy rekomendacyjne. Dzięki jednemu z nich, w 1920 roku, Steinitz zdobył posadę w Uniwersytecie Christiana-Albrechta w Kilonii. W tym mieście zmarł w 1928 roku.

Poniżej zacytowana wersja jest tylko jedną z wielu istniejących wersji lematu Steinitza. W oryginalnym brzmieniu udowodnione przez niego w 1913 r. twierdzenie orzeka, że dla każdego zbioru wektorów $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^d$ spełniających $\sum_{j=1}^n x_j = 0$ oraz $\|x_j\| \leqslant 1$ (dowolna norma w $\mathbb{R}^d$) dla $1 \leqslant j \leqslant n$ istnieje taka ich permutacja $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$, że $\| \sum_{j=1}^k x_{i_j} \| \leqslant d$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$. Motywacją dla niego była chęć uzyskania wielowymiarowego analogonu twierdzenia Riemanna o warunkowej zbieżności szeregów rzeczywistych (zobacz [5]). Aby zapoznać się z innymi podejściami do kombinatorycznych zagadnień minimalizacji normy, można sięgnąć np. po pracę Bárány'ego i Doerra [2].

Lemat Steinitza (w wersji Bárány'ego-Grinberga [3]). *Jeżeli* $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^d$ *oraz* $\|x_j\| \leqslant 1$ (*norma euklidesowa*) *dla* $1 \leqslant j \leqslant n$, *to dla pewnego ciągu* $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^n \subset \{-1, 1\}$ *mamy* $\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \| \leqslant \sqrt{d}$.

Dowód tego lematu jest trudny. Nie dlatego, że wymaga zaawansowanych środków (bo nie wymaga), ale dlatego, że wymaga niezwykłego, potężnego pomysłu. Ocenę tę można podeprzeć wieloma faktami, z których wybierzemy dwa.

Po pierwsze, własność wyrażona w lemacie Steinitza okazuje się kluczowa dla uprawiania probabilistyki w przestrzeniach Banacha. W 1962 r. Beck [1] wykazał, że mocne prawo wielkich liczb dla niezależnych zmiennych losowych o wartościach w pewnej przestrzeni Banacha X jest równoważne następującej jej własności:

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \ \bigvee_{\delta > 0} \ \bigwedge_{\substack{\{x_j\}_{j=1}^n \subset X \\ \|x_j\| \leqslant 1}} \quad \min_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \Big\| \leqslant (1 - \delta) n.$$

Takie przestrzenie Banacha nazywane są przestrzeniami *B-wypukłymi*, a lemat Steinitza – ze sporą nawiązką – głosi, że każda skończenie wymiarowa przestrzeń $\mathbb{R}^d$ ma tę własność (każda norma w $\mathbb{R}^d$ jest równoważna normie euklidesowej, ale nawet bez pomocy tego faktu można stwierdzić więcej – że teza powyższego lematu zachodzi dla każdej normy ze stałą d zamiast $\sqrt{d}$; wyniknie to z zaprezentowanego dowodu).

Drugim faktem potwierdzającym siłę lematu Steinitza jest to, że pozwala on dość łatwo uzyskać słynne, przepiękne twierdzenie Lapunowa o obrazie miary wektorowej głoszące, że jeżeli $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}^d$ jest bezatomową σ-addytywną miarą określoną na σ-ciele, to jej obraz $\mu(\Sigma)$ jest wypukłym i zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^d$ („*one of the most beautiful and best-loved theorems of the theory of vector measures*" – J. Diestel). Istnieją różne jego dowody; najbardziej klasyczny to połączenie trzech potężnych narzędzi: twierdzenia Kreina-Milmana, Banacha-Alaoglu oraz Radona-Nikodýma. Ale zamiast trzech armat wystarczy jedna – lemat Steinitza, który załatwia tu sprawę dość szybko i bezboleśnie. Co więcej, pozwala on również otrzymać interesujący rezultat o pewnej stabilności twierdzenia Lapunowa: jeżeli miara jest „prawie" bezatomowa, to jej obraz jest „prawie" wypukły. To twierdzenie Kadetsa [4]. Stopnie bezatomowości miary i wypukłości jej obrazu zdefiniował on w najbardziej naturalny sposób:

$$\mathscr{A}(\mu) = \sup\big\{ \|\mu(A)\| \colon A \text{ jest atomem miary } \mu \big\}$$

oraz

$$\mathscr{C}(\mu) = \sup\Big\{ \operatorname{dist}\Big(\frac{x+y}{2}, \mu(\Sigma)\Big) \colon x, y \in \mu(\Sigma) \Big\}.$$

Twierdzenie zaś orzeka, że istnieje taka liczba $K > 0$ (zależna tylko od wymiaru d i normy w rozważanej przestrzeni $\mathbb{R}^d$), że $\mathscr{C}(\mu) \leqslant K \cdot \mathscr{A}(\mu)$. Skąd się bierze stała K? Oczywiście z lematu Steinitza!

Warto też wspomnieć o całkiem elementarnym dowodzie twierdzenia Lapunowa pochodzącym od Rossa [6]. Jedynym użytym przez niego środkiem, poza oczywiście świetnym pomysłem, jest najbardziej klasyczna własność Darboux.

Przejdźmy do dowodu lematu Steinitza. Na początek zobaczmy, co oferuje nam prosty, rachunkowy argument oparty na idei probabilistycznej (idea stosowania takiego podejścia do problemów natury kombinatorycznej została rozwinięta przez Erdősa). Załóżmy chwilowo, że wektorów jest niewięcej niż wynosi wymiar przestrzeni. Dla dowolnego ciągu znaków $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ rozważamy wartość $S(\boldsymbol{\varepsilon}) = \|\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_j x_j\|$; chcemy pokazać, że dla choć jednego ciągu $\boldsymbol{\varepsilon}$ mamy $S(\boldsymbol{\varepsilon}) \leqslant \sqrt{d}$. Obliczymy średnią wszystkich kwadratów $S(\boldsymbol{\varepsilon})^2$ – jeżeli okaże się ona niewiększa od d, to teza zostanie wykazana. Zauważmy, że

$$S(\boldsymbol{\varepsilon})^2 = \langle \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i x_i | \sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i x_i \rangle = \sum_{i=1}^{d} \|x_i\|^2 + \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle x_i | x_j \rangle \leqslant$$
$$\leqslant d + \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle x_i | x_j \rangle,$$

a zatem średnią $\overline{S^2}$ możemy oszacować następująco:

$$\overline{S^2} = 2^{-d} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1,1\}^d} S(\boldsymbol{\varepsilon})^2 \leqslant d + 2^{-d} \sum_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1,1\}^d} \sum_{i \neq j} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle x_i | x_j \rangle = d$$

(ostatnia równość wynika stąd, że dla każdej pary indeksów (i, j), $i \neq j$, jest tyle samo ciągów $\boldsymbol{\varepsilon} \in \{-1, 1\}^d$ spełniających $\varepsilon_i \varepsilon_j = -1$, co tych spełniających $\varepsilon_i \varepsilon_j = 1$; jednych i drugich jest 2^{d-1}). To kończy dowód lematu w przypadku, gdy liczba danych wektorów nie przekracza wymiaru przestrzeni. Jedynym przejściem, w którym wprowadziliśmy znak nierówności, było brutalne oszacowanie $\sum_{i=1}^{d} \|x_i\|^2 \leqslant d$. Widać, że nie da się z tym nic mądrego zrobić, gdy wektorów jest więcej niż d, i to jest właśnie ten moment, w którym lemat Steinitza staje się interesujący.

Przechodząc do dowodu lematu Steinitza w jego pełnej ogólności, czynimy pierwszą, oczywistą, obserwację: jeżeli wektorów $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ jest więcej niż d, to niektóre z nich są kombinacjami liniowymi innych, więc w wyrażeniu $\sum_{j=1}^{d} \varepsilon_j x_j$ część składników będzie sumować się do zera (a z pozostałymi być może jakoś sobie poradzimy). Problem oczywiście leży w tym, że w naszym wyborze współczynników ε_j ograniczamy się do zbioru $\{-1, 1\}$. Czy znajdziemy jednak jakieś zerujące się kombinacje liniowe o takich współczynnikach? Czas zrealizować ideę spojrzenia na kombinacje, świadczące o liniowej zależności, jak na zbiór o pewnych geometrycznych własnościach.

Określmy

$$\mathcal{P} = \Big\{ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [-1, 1]^n \colon \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0 \Big\}.$$

Jest to pewien podzbiór przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$, a dokładniej – wypukły (i domknięty) wielościan zawarty w kostce $[-1, 1]^n$. Oczywiście $\mathcal{P} \neq \emptyset$, bowiem $0 \in \mathcal{P}$. Rozważmy konkretny przykład czterech wektorów, leżących na płaszczyźnie (czyli $n = 4$ i $d = 2$). Niech

$$x_1 = (1, 0), \quad x_2 = (0, 1), \quad x_3 = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \Big), \quad x_4 = \Big(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4} \Big).$$

Niech także $\mathscr{V} \subset \mathbb{R}^4$ oznacza przestrzeń liniową tych wektorów $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, dla których $\sum_{j=1}^4 \alpha_j x_j = 0$. Łatwo wyliczamy, że $\mathscr{V} = \operatorname{lin}\{\xi_1, \xi_2\}$, gdzie

$$\xi_1 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0\Big), \quad \xi_2 = \Big(-\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}, 0, 1\Big),$$

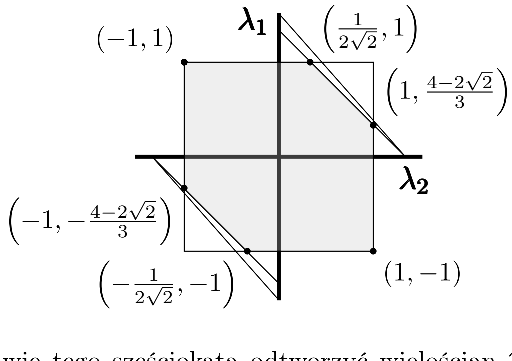
a zatem w tym przypadku wielościan $\mathcal{P}$ jest dwuwymiarowym wielościanem (za chwilę przekonamy się, że sześciokątem) leżącym w przestrzeni $\mathbb{R}^4$, i danym przez warunki:

$$\mathcal{P} = \big\{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 \colon \lambda_1, \lambda_2 \text{ spełniają nierówności } (*)\big\}$$

oraz

$$(*) \qquad \begin{cases} -1 & \leqslant & \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1 + \frac{3}{4}\lambda_2 & \leqslant & 1 \\ -1 & \leqslant & \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1 + \frac{\sqrt{7}}{4}\lambda_2 & \leqslant & 1 \\ -1 & \leqslant & \lambda_1 & \leqslant & 1 \\ -1 & \leqslant & \lambda_2 & \leqslant & 1 \end{cases}$$

Zbiór $\mathcal{L}$ wszystkich par (λ_1, λ_2), spełniających układ $(*)$, jest przedstawiony na rysunku.



Aby na podstawie tego sześciokąta odtworzyć wielościan $\mathcal{P}$, należy przekształcić go przy pomocy odwzorowania liniowego $\Phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathscr{V} \subset \mathbb{R}^4$ o macierzy, której kolumnami są wektory ξ_1 i ξ_2. Rzecz jasna, $\mathcal{P}$ jest także sześciokątem, a jego wierzchołkami są obrazy, przez odwzorowanie Φ, wierzchołków sześciokąta $\mathcal{L}$. Są nimi punkty:

$$\begin{gathered} \pm\Big(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{3}{4},\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{7}}{4},\ 1,\ -1\Big), \\ \pm\Big(-1,\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{7}(2-\sqrt{2})}{6},\ 1,\ \tfrac{4-2\sqrt{2}}{3}\Big), \\ \pm\Big(-1,\ -\tfrac{1+\sqrt{7}}{4},\ \tfrac{1}{2\sqrt{2}},\ 1\Big). \end{gathered}$$

Wygląda to niezwykle obiecująco – każdy z sześciu wierzchołków ma dwie współrzędne ze zbioru $\{-1, 1\}$. Czy to przypadek? Aby na to odpowiedzieć, wróćmy do sytuacji ogólnej.

Zdefiniowaliśmy już wielościan $\mathcal{P} \subset [-1, 1]^n$. W ogólnym przypadku $\mathcal{P}$ jest wymiaru przynajmniej $n - d$ (dokładnie wymiaru $n - \operatorname{rank}(A)$, gdzie A jest macierzą układu równań, definiującego zbiór $\mathcal{P}$). Zgodnie z tym, co sugeruje nam powyższy przykład, wybierzmy dowolny jego wierzchołek $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$, a mówiąc w sposób bardziej cywilizowany – dowolny jego punkt ekstremalny (jeżeli ktoś bardzo chce poprawić sobie humor, może skorzystać z twierdzenia Kreina-Milmana).

Twierdzimy, że $\alpha_i^* \in \{-1, 1\}$ dla co najmniej $n - d$ indeksów $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wynika to z faktu, że jeżeli $\alpha_{i_1}^*, \ldots, \alpha_{i_k}^* \in (-1, 1)$, to wektory $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ muszą być liniowo niezależne. Rzeczywiście – w przeciwnym wypadku istniałaby nietrywialna kombinacja liniowa $\gamma_{i_1} x_{i_1} + \ldots + \gamma_{i_k} x_{i_k} = 0$, przy czym wszystkie $|\gamma_{i_j}|$ mogą być tak małe, jak chcemy. Skoro zaś wszystkie $\alpha_{i_j}^*$ leżą w otwartym przedziale $(-1, 1)$, możemy (dodając tego typu kombinację) lekko poruszyć współczynniki w wyrażeniu $\sum_{i=1}^n \alpha_i^* x_i$, nie zmieniając jego (zerowej) wartości i nie wyprowadzając żadnego z α_i^* poza przedział $[-1, 1]$. W ten sposób dostalibyśmy sprzeczność z faktem, że α^* jest punktem ekstremalnym $\mathcal{P}$. Wniosek: współrzędnych wierzchołka α^*, które leżą w $(-1, 1)$, może być co najwyżej tyle, ile liniowo niezależnych wektorów w $\mathbb{R}^d$. Po ewentualnym przenumerowaniu wektorów x_i, możemy przyjąć, że $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_k^*$ są wszystkimi współrzędnymi punktu α^*, leżącymi w $(-1, 1)$ (wtedy $0 \leqslant k \leqslant d$), a dla $k < i \leqslant n$ mamy $\alpha_i^* \in \{-1, 1\}$.

Mamy więc kandydata na spory (bo długości co najmniej $n-d$) fragment żądanej kombinacji $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i$, dla której $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Jest on wyznaczony przez współczynniki $\alpha_{k+1}^*, \ldots, \alpha_n^*$; oznaczmy go jako $u = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i^* x_i$. Teraz pytanie brzmi: jak dobrać początkowych k współczynników?

Rozważmy k-wymiarowy równoległościan

$$\mathcal{Q} = \Big\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \colon \alpha_i \in [-1, 1] \Big\}$$

rozpięty przez liniowo niezależne wektory $x_1, \ldots, x_k$ (jeżeli $k = 0$, to nie ma czego rozpinać, ale wtedy wszystkie $\alpha_i^* \in \{-1, 1\}$, więc mamy już gotową kombinację, która nawet jest wektorem zerowym). Jego boki mają długość niewiększą niż 2. Ponadto $0 \in u + \mathcal{Q}$, co wynika wprost z definicji wektora u oraz wielościanów $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$. W rozważanym wcześniej przykładzie wybranym punktem ekstremalnym mógłby być

$$\alpha^* = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{4}, 1, -1 \Big),$$

przy czym nie musimy dokonywać przenumerowania, bo jego ostatnie dwie współrzędne ($n-d=2$) już należą do zbioru $\{-1,1\}$. W naszej kombinacji przyjmiemy więc $\varepsilon_3 = 1$ i $\varepsilon_4 = -1$. Ponadto mamy

$$u = x_3 - x_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{4}\right) \simeq (-0.04, 0.04)$$

a $\mathcal{Q}$ jest kwadratem o środku w $(0,0)$ i długości boku równej 2. Szukając pozostałych współczynników $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1,1\}$, widzimy, że w istocie poszukujemy takiego wierzchołka kwadratu $u+\mathcal{Q}$, którego norma nie przekraczałaby $\sqrt{2} = \sqrt{d}$. Oczywiście odpowiednim wyborem jest wierzchołek $u+(1,-1)$, który odpowiada kombinacji znaków $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = (1,-1,1,-1)$.

W ogólnej sytuacji postępujemy tak samo – szukamy wierzchołka równoległościanu $u+\mathcal{Q}$, którego norma nie przekracza $\sqrt{d}$. Dlaczego taki istnieje? Bo, jak wcześniej zauważaliśmy, $0 \in u+\mathcal{Q}$. Pozostaje więc wykazać następujący, ogólny fakt: jeżeli $\mathcal{Q}$ jest równoległościanem, zdefiniowanym jak wyżej przez k liniowo niezależnych wektorów, oraz $a \in \mathcal{Q}$, to istnieje taki jego wierzchołek q, że $\|a-q\| \leqslant \sqrt{k}$ ($\leqslant \sqrt{d}$).

Tutaj już działa prosta indukcja względem k. Rzutujemy punkt a prostopadle na każdą z $(k-1)$-wymiarowych ścian $\mathcal{Q}$. Dla choć jednego z otrzymanych rzutów, nazwijmy go $\pi(a)$, mamy $\|a-\pi(a)\| \leqslant 1$ (dlaczego?). Z kolei założenie indukcyjne pozwala znaleźć taki wierzchołek q ściany, na której leży $\pi(a)$ (który oczywiście jest też wierzchołkiem $\mathcal{Q}$), że $\|\pi(a)-q\| \leqslant \sqrt{k-1}$. W konsekwencji

$$\|a-q\|^2 = \|a-\pi(a)\|^2 + \|\pi(a)-q\|^2 \leqslant 1+k-1 = k,$$

i to był jedyny moment, w którym wykorzystaliśmy to, że $\|\cdot\|$ jest normą euklidesową. Bez trudu można przeprowadzić to samo rozumowanie dla dowolnej normy na $\mathbb{R}^d$, zastępując jednak w tezie $\sqrt{d}$ przez d.

[1] A. Beck, *A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 329–334.

[2] I. Bárány, B. Doerr, *Balanced partitions of vector sequences*, Linear Alg. Appl. **414** (2006), 464–469.

[3] I. Bárány, V.S. Grinberg, *On some combinatorial questions in finite dimensional spaces*, Linear Alg. Appl. **41** (1981), 1–9.

[4] V.M. Kadets, *Remark on the Lyapunov theorem on vector measures*, Funct. Anal. Appl. **25** (1991), 295–297.

[5] P. Rosenthal, *The remarkable theorem of Lévy and Steinitz*, Amer. Math. Monthly **94** (1987), 342–351.

[6] D.A. Ross, *An elementary proof of Lyapunov's theorem*, Amer. Math. Monthly **112** (2005), 651–653.

Tomasz Kochanek

Autor artykułu jest adiunktem w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, a także opiekunem Koła Naukowego Matematyków UŚ.

[Zofia Kowalewska]

Zajmując się matematyką, często ulegamy złudnemu przeświadczeniu, że jest ona jedną z nielicznych dziedzin nauki, w której panuje idealna równość. Powtarzając do znudzenia za Euklidesem, że w matematyce nie ma specjalnych dróg dla królów, wszystkie demograficzne dysproporcje wśród ludzi zajmujących się tą nauką bagatelizujemy, uznając je za zbieg okoliczności, albo przeciwnie – wysnuwamy na ich podstawie wnioski na temat „wrodzonych zdolności” różnych grup.

Statystyki mówiące o tym, że większość matematyków to pierworodni synowie, wywołują z pewnością większe poruszenie (zwłaszcza wśród pierworodnych synów) niż fakt, że podczas studiów pierwszego stopnia na wykładach przeciętny student zapoznał się najprawdopodobniej z jednym twierdzeniem kobiety-matematyka. Chodzi oczywiście o Zofię Kowalewską, znaną słuchaczom wykładu „Równania różniczkowe cząstkowe” jako autorka twierdzenia Cauchy'ego-Kowalewskiej – czego nietrudno było domyślić się każdemu, kto przed lekturą artykułu zapoznał się z jego tytułem. Zagadką może ciągle jednak być powód rozpoczęcia go przydługim wstępem na temat równości w matematyce. Biografia Zofii Kowalewskiej jest doskonałym przykładem na to, jak bardzo iluzoryczna jest ta równość.

Urodzona w 1850 roku w Moskwie Zofia Kowalewska już od dzieciństwa była zafascynowana matematyką. Trudno się jej dziwić – ściany jej pokoju zostały częściowo wytapetowane... wykładami Ostrogradskiego na temat rachunku różniczkowego i całkowego. Można by jednak przypuszczać, że zaciekawienie treścią nietypowej tapety wygasłoby, gdyby nie podsycał go wuj Zofii, Piotr Krukowski. Pomimo że nie rozumiała jeszcze istoty wielu matematycznych problemów, o których jej opowiadał, dyskusje z nim wystarczyły, by rozpalić jej ciekawość.

Niestety, w carskiej Rosji sam talent do matematyki nie wystarczał, żeby ją studiować – jako kobieta Kowalewska nie mogła podjąć nauki na uniwersytecie, a do wyjazdu na zagraniczną uczelnię potrzebna była jej zgoda ojca bądź męża. Zdesperowana Zofia postanowiła więc w 1868 poślubić młodego paleontologa Włodzimierza Kowalewskiego, wraz z którym wyjechała do Niemiec. Uniwersytet w Heidelbergu nieoficjalnie zezwolili jej na uczęszczanie na wykłady – pod warunkiem, że sami wykładowcy wyrażą zgodę na obecność kobiety na sali.

Choć w Heidelbergu talent Kowalewskiej wzbudził prawdziwą sensację i młoda matematyczka szybko stała się ulubienicą wykładowców, w 1870 postanowiła wyjechać do Berlina, aby studiować u Karla Weierstrassa – wówczas jednego z najbardziej cenionych matematyków w Europie. Niestety, kolejny raz napotkała przeszkody – pomimo starań Weierstrassa senat uczelni nie pozwolił jej uczestniczyć w zajęciach. Można tu jednak mówić o szczęściu w nieszczęściu – będący pod wrażeniem jej zdolności Weierstrass zaczął udzielać jej prywatnych lekcji.

Podczas czterech lat intensywnej pracy Kowalewska napisała trzy prace naukowe – o równaniach różniczkowych cząstkowych, pierścieniach Saturna i całkach eliptycznych. To właśnie w pierwszej z nich, zatytułowanej „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung" zawarte zostało wspominane już twierdzenie Cauchy'ego-Kowalewskiej, uogólniające twierdzenie Cauchy'ego (którego istotnie uproszczony dowód został również przedstawiony przez Kowalewską) na układ równań różniczkowych cząstkowych.

Pomimo uznania dla talentu swojej studentki i jej dorobku naukowego Weierstrass uważał, że tytuł naukowy (który zostałby za analogiczne osiągnięcia przyznany mężczyźnie) do niczego nie przyda się kobiecie – a tym bardziej kobiecie zamężnej. Przekonany, że dla mężatki studia matematyczne mogą być jedynie intelektualną rozrywką, a nie przepustką do kariery naukowej, zaoferował jej pomoc dopiero wtedy, gdy Kowalewska przyznała, że zawarła fikcyjne małżeństwo tylko po to, by móc studiować za granicą.

Wsparcie Weierstrassa i innych profesorów pomogło przełamać opór władz uczelni – prace zaprezentowane przez Kowalewską zapewniały jej w 1874 roku doktorat summa cum laude na Uniwersytecie w Göttingen. Tym samym Zofia Kowalewska została pierwszą kobietą posiadającą tytuł doktora matematyki. Niestety, pomimo swoich dotychczasowych publikacji i pomocy Weierstrassa nie mogła uzyskać akademickiego stanowiska.

Kowalewska postanowiła powrócić do Rosji, jednak i tam jej droga do kariery naukowej była zamknięta. Jako kobieta nie mogła przystąpić nawet do egzaminu uprawniającego do nauczania matematyki wyższej. Nie pozwolono jej nawet wykładać za darmo na uniwersytecie. Jedyną propozycję pracy, jaką otrzymała – jako nauczycielka arytmetyki w szkole podstawowej – skwitowała stwierdzeniem: „Niestety, tabliczka mnożenia zawsze była moją słabością".

Problemy ze znalezieniem pracy i zła sytuacja finansowa, a także odizolowanie od rosyjskiej społeczności naukowej (wówczas nieprzychylnej Weierstrassowi i niemieckiej szkole matematyki) sprawiły, że Kowalewska na kilka lat porzuciła swoje badania. W tym czasie urodziła córkę, poświęciła się również literaturze – rozpoczęła pracę na powieścią, pisywała także recenzje teatralne i artykuły naukowe do gazet.

Do świata nauki Kowalewska postanowiła powrócić rok po narodzinach córki, w 1879, gdy została zaproszona przez Czebyszewa do zaprezentowania swoich prac na Rosyjskim Kongresie Przyrodników i Lekarzy. Jej badania spotkały się z dużym uznaniem, a ponadto na kongresie pojawił się poznany przez nią w Berlinie Gösta Mittag-Leffler, także uczeń Weierstrassa, który postanowił pomóc koleżance w znalezieniu posady na którymś z europejskich uniwersytetów.

Tymczasem Kowalewska wznowiła korespondencję z Weierstrassem, który zaproponował jej rozpoczęcie badań nad refrakcją światła w kryształach. Temat ten nie fascynował chyba jednak żadnego z nich – błąd w pracach Kowalewskiej (wyprowadzone przez nią rozwiązanie równań Lamégo nie spełniało... równań Lamégo) zauważono dopiero w 1916 roku, kilka miesięcy po śmierci Kowalewskiej.

Powrót do świata nauki nie spotkał się jednak z aprobatą męża matematyczki, zamieszanego w aferę finansową i nie odnoszącego większych sukcesów na polu naukowym. Ich separacja była jednak kolejną przeszkodą dla Kowalewskiej – bez męża znowu stawała się w świecie nauki postacią co najmniej niewygodną. Zresztą, jak przekonał się Mittag-Leffler, wytrwale szukający dla swojej młodszej koleżanki posady na Uniwersytecie w Sztokholmie, płeć i stan cywilny nie były jej jedynymi wadami – jako Rosjanka była niemile widziana w Sztokholmie. W roku 1883 nastąpił jednak przełom – Mittag-Leffler został dyrektorem wydziału matematyki, a mąż Kowalewskiej... popełnił samobójstwo.

Już jako stateczna wdowa Zofia Kowalewska została zaproszona do Sztokholmu, gdzie w styczniu 1884 zaczęła wykładać teorię równań różniczkowych. Jako privatdozent nie otrzymywała jednak pensji od uniwersytetu, a ze składek swoich studentów. Jej zatrudnienie było jednak i tak otoczone atmosferą skandalu – wiadomości o jej przyjeździe do Szwecji pojawiały się na pierwszych stronach gazet, a słynący ze swojej mizogini pisarz August Strindberg uczynił ją celem swoich ataków. Szczególnej frustracji przysporzył mu fakt, że już po pół roku nauczania Kowalewska została – jako pierwsza kobieta w historii – profesorem matematyki. W lokalnych gazetach pisał wtedy o tym, że istnienie kobiety-profesora to „istna potworność”. (W ramach rewanżu rzeczona „potworność” kilka lat później zorganizowała grupę kobiet ze świata nauki i wraz z nimi pojawiła się na gali honorującej jego dokonania.)

Kariera naukowa Kowalewskiej rozkwitała – została redaktorem matematycznego czasopisma akademickiego „Acta Mathematica” (a także pierwszą kobietą sprawującą takie stanowisko). Wkrótce również odniosła jeden ze swoich największych naukowych sukcesów – w 1888 roku jej praca „O zagadnieniu obrotu ciała sztywnego wokół nieruchomego punktu” została wyróżniona Prix Bordin, nagrodą Paryskiej Akademii Nauk. Kowalewska jako pierwsza zajęła się obrotem bryły niesymetrycznej (wcześniejsze prace Eulera i Lagrange'a na ten temat dotyczyły jedynie szczególnych przypadków obrotu ciał symetrycznych) – nazywanej dziś bąkiem Kowalewskiej. Nadesłana anonimowo na konkurs praca zachwyciła jury do tego stopnia, że wysokość nagrody została podniesiona z 3000 do 5000 franków.

Nagroda otworzyła Kowalewskiej drogę do dalszej kariery akademickiej; w 1889 roku zostaje jej przyznany dożywotni tytuł profesora i otrzymuje stanowisko kierownika wydziału analizy (nie trzeba już chyba wspominać o tym, że dokonuje tego jako pierwsza kobieta w historii). Jej dalsze prace na temat obrotu bryły sztywnej zostają uhonorowane przez Szwedzką Akademię Nauk. Niestety, nie wystarczyło to, by zostać jej członkinią – cytując bowiem ówczesnego sekretarza akademii, na jakich stworzeniach należałoby się zatrzymać, gdyby zaczęło się do niej przyjmować kobiety? Jeszcze mniej szczęścia czekało Kowalewską w ojczyźnie – jej wszystkie starania o uzyskanie pozycji akademickiej w Rosji kończyły się odmową. Czebyszew oburzył się tym do tego stopnia, że zaczął zabiegać o jej przyjęcie do Rosyjskiej Akademii Nauk, a w efekcie jego starań Kowalewska została korespondencyjnym członkiem Akademii. Co ciekawe, pozycja ta została utworzona specjalnie w tym celu – płeć Kowalewskiej nie pozwalała przecież na włączenie jej do grona rosyjskich naukowców na zwyczajnych warunkach.

Obok kariery naukowej, Kowalewska poświęcała czas również swojej pasji do literatury. Podczas lat spędzonych w Szwecji opublikowała sztukę wraz z Anną Charlotte Leffler, siostrą Gösty Mittag-Lefflera, a także uznany przez rosyjską krytykę zbiór wspomnień z dzieciństwa. Duże kontrowersje wzbudziła jej niemal autobiograficzna powieść „Nihilistka" – wielokrotnie zakazywano jej publikacji w Rosji (ostatecznie została wydana dopiero w 1928 roku).

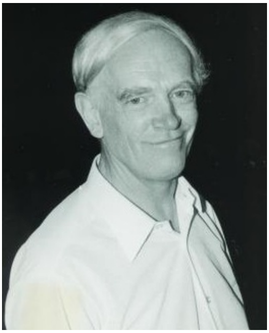
Niestety, pasmo sukcesów Kowalewskiej zostało przerwane, gdy na początku 1891 roku zachorowała na grypę, która wkrótce przerodziła się w zapalenie płuc. Zofia Kowalewska zmarła 10 lutego 1891 roku, w wieku 41 lat.

Dzięki swoim zdolnościom i determinacji Zofia Kowalewska utorowała drogę do kariery naukowej i badawczej tysiącom kobiet, a jej biografia usiana jest kamieniami milowymi w historii kobiet w matematyce. Amerykańskie Stowarzyszenie na rzecz Kobiet w Matematyce obrało ją na patronkę programu stypendiów dla uczennic liceum pragnących pogłębiać wiedzę matematyczną, a niemiecka fundacja Alexandra von Humboldta przyznaje młodym badaczom nagrody jej imienia. Pionierski charakter Kowalewskiej został uhonorowany także w mniej przyziemny sposób – jej imieniem został nazwany krater na Księżycu, co czyni ją jedną z niewielu kobiet wyróżnionych w ten sposób.

Magdalena Nowak

[Ernst Witt]

Matematyka jest nieco odmienna od pozostałych dziedzin nauki. Jako że rozważania matematyczne prowadzi się raczej w oderwaniu od rzeczywistości (co oczywiście nie znaczy, że nie są często prowadzone z myślą o *zastosowaniach w rzeczywistości*), nasza ulubiona gałąź wiedzy jest wybitnie odporna na wszelkiego rodzaju zaburzenia ideologiczne. Naukowcy pracujący dla zbrodniczych systemów tworzą patologiczne teorie, przesączone ich spaczonym myśleniem. Badania Josefa Mengele i Karina Magnussena nad eugeniką zapisały najbardziej hańbiącą kartę w historii nauki. Jednak, o ile w przypadku dyscyplin przyrodniczych i humanistycznych nazistowscy badacze zostali zapomnieni lub potępieni przez historię nauki, w przypadku matematyki było inaczej.



Ernst urodził się w 1911 na wyspie Als (wówczas Niemcy, obecnie Dania) w religijnej rodzinie – ojciec był szkolnym katechetą z zawodu i misjonarzem z powołania. W wieku dwóch lat wyjechał z rodzicami do Chin (na wypadek gdybyście zapomnieli – ojciec był misjonarzem). Rodzice nie byli nadmiernie troskliwi, więc Ernst od małego musiał sam znajdować sobie zajęcia – podczas siedmioletniego pobytu w Państwie Środka przyszły matematyk nauczył się języka chińskiego i opanował podstawy arytmetyki. Jako dziewięciolatek razem ze swoim młodszym bratem Ottem został wysłany przez rodziców z powrotem do Niemiec – do wujka w Müllheim (Badenia-Wirtenbergia). Wujek był pastorem i prowadził dom dla dzieci rodziców - misjonarzy; zajmował się na co dzień trzydzieściorgiem dzieci (w tym ósemką swoich własnych). Niestety, w domowej szkole główny nacisk kładziono na dyscyplinę i religijne wychowanie – niezbyt stymulujące dla rozwoju naukowego środowisko. Szczęśliwie dla algebry i teorii liczb, talent matematyczny Ernsta rozbłysnął po kolejnych siedmiu latach - gdy jako szesnastolatek rozpoczął naukę w szkole średniej we Freiburgu. Młody chłopak szybko został objęty indywidualnym tokiem nauczania przez swojego nauczyciela matematyki i już dwa lata później rozpoczął studia matematyczne na Uniwersytecie we Freiburgu.

Podczas swoich studiów Ernst uczęszczał na wykłady takich algebraicznych sław jak Emma Noether czy Gustav Hergoltz. Wkrótce po rozpoczęciu edukacji wyższej, przedstawił temu drugiemu swój własny – znacznie uproszczony – dowód twierdzenia Wedderburna:

Każdy skończony pierścień z dzieleniem jest ciałem.

Hergoltz namówił Witta na publikację i tym sposobem nazwisko Witta po raz pierwszy pojawiło się w czasopismach matematycznych w 1931 roku. Wkrótce po publikacji Witt zetknął się z Emilem Artinem i zaczął chodzić na jego wykłady o formach kwadratowych; w 1932 roku obaj matematycy przez pewien czas prowadzili wspólne badania nad tymi zagadnieniami.

Gdy Hitler doszedł do władzy w 1933, Witt natychmiast zainteresował się nazizmem. 1 maja tego roku pozytywnie rozpatrzono jego podanie o przyjęcie do NSDAP. Podczas gdy jego przyjaciół i niedawnych mistrzów represjonowano i szykanowano z powodu żydowskiego pochodzenia (Noether usłyszała na uczelni, że „studenci aryjscy domagają się aryjskich wykładowców, a nie żydowskich wykładowców" i straciła profesurę, Artin został zmuszony do emigracji do Stanów Zjednoczonych), Witt szybko piął się po szczeblach naukowej kariery – w końcu 1933 roku otrzymał tytuł doktora. Wbrew pozorom (które mogły być naprawdę bardzo silne, zważywszy, że miał w zwyczaju przychodzić na wykłady w mundurze SA), Witt nie był zbytnio oddany skrajnie prawicowej ideologii. Był bardzo aktywny, brał udział w nocnych marszach, ale był niezbyt gorliwym wyznawcą narodowego socjalizmu (być może dlatego, że nie był typem osoby, która mogłaby być gorliwym wyznawcą jakiejkolwiek ideologii). Herglotz po wojnie podsumował jego postępowanie następująco: „Zapytałem go co sądzi o swoich partyjnych przyjaciołach, których idee – jak podejrzewałem – często mogły być nie do pogodzenia z jego oddaniem dla nauki. Jego odpowiedź: »Nie wiem o nich zbyt wiele. Podczas nocnych pochodów nie rozmawiam z nimi, a rankiem natychmiast wracam do domu, kontynuować badania tam gdzie je zostawiłem ubiegłego wieczoru.« W tamtych dniach mieliśmy sporo kłopotów z pewnymi *aktywistami*, szczególnie wśród młodych wykładowców. Chciałbym wyraźnie zaznaczyć, że Witt zawsze stał z boku i nie pomagał tej grupie w burzeniu porządku w instytucie. Był całkowicie zaabsorbowany swoją pracą matematyczną, którą przerywał tylko na czas snu i nocnych marszów." Z kolei nazista Werner Weber napisał o nim: „Witt przedstawił pewnego razu takie stanowisko: wszystkie dziedziny nauki są podatne na przeobrażenia spowodowane duchem czasu. Tylko w matematyce wszystko pozostaje takim, jakie było".

Z racji wątłości fizycznej, Witt niemal nie walczył w II wojnie światowej. Podczas inwazji na Związek Sowiecki, brał przez krótki czas udział w operacjach na froncie wschodnim. Z tym niedługim epizodem związana jest anegdotka z pobytu Witta w Princeton. Po inauguracyjnym odczycie dotyczącym twierdzenia Witta, Ernst zwrócił się do referenta – Aleksadra Kurosha – ze słowami: „To twierdzenie udowodniłem w ZSRS". „Hej, nigdy nie wiedziałem że odwiedziłeś kiedyś ZSRS. Kiedy to było?" spytał zaskoczony Kurosh. „Kiedy byłem w Wehrmachcie" odparł pogodnie Witt.

Kurosh odwrócił się na pięcie i odszedł bez słowa. Witt nigdy do końca nie zrozumiał co takiego powiedział.

Osiągnięcia matematyczne Witta są związane z algebrą i algebraiczną teorią liczb. Oprócz wspomnianego twierdzenia Witta mamy w algebrze również wielomian Witta, wektor Witta, grupę Witta, pierścień Witta a nawet algebrę Witta. Poza algebrą, bardzo znane jest twierdzenie Bourbakiego-Witta o punkcie stałym:

Jeżeli $(X, \leqslant)$ *jest zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy łańcuch ma kres górny, to każda funkcja* $f\colon X \to X$ *spełniająca warunek* $x \leqslant f(x)$ *dla każdego* $x \in X$ *ma punkt stały.*

Twierdzenie to udowodnili niezależnie Nicolas Bourbaki i Witt. W teorii przestrzeni dwuliniowych ważną rolę odgrywa twierdzenie Witta o przedłużaniu izometrii:

Niech V *będzie symetryczną przestrzenią dwuliniową nad ciałem* K *o charakterystyce różnej od dwóch. Jeżeli* $u, v \in V$ *są wektorami nieizotropowymi i mają równe normy, to istnieje taka izometria i przestrzeni* V*, że* $i(u) = v$*.*

Wszystkich zainteresowanych algebrą dwuliniową i badaniami Witta zachęcam gorąco do sięgnięcia po książkę „Wykłady z algebry dwuliniowej” autorstwa prof. Kazimierza Szymiczka – legendy naszego instytutu.

Mikołaj Stańczyk

[Jeszcze o Hypatii]

W poprzednim numerze [Macierzatora] ukazał się artykuł Mikołaja Stańczyka [Prawie jak πografia – Hypatia z Aleksandrii 4/3 w. p.n.e.] [6]. Naszym zdaniem historia bohaterki artykułu została opisana jednostronnie. Jest to dla nas tym smutniejsze, że był to artykuł otwierający 42 (grudniowy) numer [Macierzatora], który ukazał się tuż przed świętami Bożego Narodzenia. Z pełnym szacunkiem dla Autora artykułu prosimy, by na łamach czasopisma szanował poglądy i uczucia Czytelników.

Szczególnie niestosowny był naszym zdaniem przypis do artykułu, który ukazał się w wielu „drukowanych” egzemplarzach [Macierzatora]: „Warto tutaj wspomnieć, że Cyryl jest świętym Kościoła rzymskokatolickiego i Kościoła prawosławnego; ma tytuł doktora kościoła i jest nazywany Filarem Wiary; pełne uznania dla Cyryla przemówienie wygłosił Papież Benedykt XVI 3 października 2007” (poprzez zestawienie artykułu ze słowem skierowanym przez papieża do wiernych zebranych na audiencji generalnej [2]). Wydaje nam się, że [Macierzator] nie jest miejscem na światopoglądowe „przepychanki”. Dziękujemy za usunięcie tego przypisu z późniejszych egzemplarzy oraz wydania elektronicznego.

Spróbujmy przyjrzeć się powodom, dla których przedstawiona przez Autora historia Hypatii jest tylko jedną z teoretycznie możliwych wersji wydarzeń.

Paradoks Hypatii polega na tym, że aleksandryjska neoplatoniczka jest tyleż popularna, co nieznana [5] – problem jest nawet ze stwierdzeniem kiedy żyła, choć większość źródeł wskazuje na **IV/V w. n.e.** Problem pojawia się również, gdy chcemy poznać jakieś informacje na temat dorobku naukowego Hypatii, choć przecież *była nie byle jaką matematyczką* [6]. Nie zachowały się żadne jej pisma, ale można jej hipotetycznie przypisać współpracę z ojcem przy redakcji pism Ptolemeusza i Euklidesa. Wiadomo, że pracowała nad komentarzami i wydaniem traktatów *Arytmetyka* Diofantosa i *Stożkowe* Apoloniusza z Pergi. Nie można wykluczyć, że ostateczny kształt tych dzieł, jaki dotarł do naszych czasów, jak również *Almagestu* i *Tablic podręcznych* Ptolemeusza, jest dziełem Hypatii. Nie ma zatem żadnych źródeł, które dowodzą jej wpływu na matematykę.

Równie niepewne są okoliczności śmierci Hypatii i ewentualne uznanie św. Cyryla za winnego linczu na tej starożytnej filozofce. Jak zauważa dr Dariusz Karłowicz w recenzji książki prof. Dzielskiej opublikowanej w dzienniku „Rzeczpospolita": „Można jednak również za Dzielską dodać, że w tym samym mniej więcej czasie ten sam motłoch – okrutny, nierozumny i nieprzewidywalny, który Platonowi nie bez powodu kojarzył się z dziką bestią, morduje również dwóch biskupów: arianina i katolika" [5].

Stosunek prof. Dzielskiej do tych wydarzeń jest również dość niejasny. Mimo iż we własnej książce zrzuca winę za lincz na Hypatii wyłącznie na chrześcijan, to w wywiadzie dla Polskiego Radia [4, 2 minuta, 15 sekunda] wyraźnie stwierdza, że „Możliwe, że wyłonił się lektor Piotr i on zachęcił lud aleksandryjski. Ci ludzie o porywczym usposobieniu to nie są tylko chrześcijanie, to jest określenie ludu aleksandryjskiego, który gotów był wziąć udział w każdym konflikcie, linczu, pogromie, którym można było bardzo łatwo manipulować. Także również w linczu, który został dokonany na Hypatii brali udział przedstawiciele wszystkich odłamów wszystkich tych trzech wspólnot, mieszając się." Odwołując się do Sokratesa Scholastyka (jedynego autora żyjącego w czasach tych wydarzeń) prof. Dzielska stwierdza, że nie można na tej podstawie stwierdzić, czy św. Cyryl jest związany ze śmiercią Hypatii.

Kolejne opracowanie przychylające się do stanowiska, że św. Cyryl nie był winny śmierci Hypatii to publikacja profesora historii Kościoła i patrologii na Uniwersytecie Wrocławskim Bertholda Altanera, gdzie czytamy: „Nie można pomawiać go [św. Cyryla] o winę zamordowania w 415 roku słynnej neoplatonki Hypatii" [1]. Natomiast teolog Jean-Guinole-Marie Daniélou oraz historyk Henri-Irénée Marrou umieścili w swojej książce następującą uwagę: „Pomimo paru epizodów będących przejawem bezprawia, jak samosąd wobec Hypatii, pogańskiej kobiety-filozofa, w roku 415 czy wobec chrześcijańskiego studenta około roku 485 lub 487, będące tam w rozkwicie studia filozoficzne rozwijają się w atmosferze religijnej neutralności” [3].

Wydaje się więc, że nie dysponujemy odpowiednimi źródłami, by rozstrzygnąć kto jest winny śmierci Hypatii ani jakie miał powody, by doprowadzić do linczu. Niewiele wiemy również o samej filozofce i jej działalności społeczno-politycznej oraz twórczości matematycznej. Jedno wiemy na pewno: była postacią wybitną. I jako taką ją zapamiętajmy.

[Literatura]

[1] B. Altaner, A. Stuiber, *Patrologia: życie, pisma i nauka Ojców Kościoła*, P. Pachciarek (tłum.), IW „PAX”, Warszawa 1990, ISBN 83-211-1079-7

[2] Benedykt XVI, *Św. Cyryl Aleksandryjski*, `http://www.opoka.org.pl/biblioteka/W/WP/benedykt_xvi/audiencje/ag_03102007.html`, czas dostępu: 03.01.2012

[3] J. Daniélou, I. Marrou, *Historia Kościoła. T.1: Od początku do roku 600*, M. Tarnowska (tłum.), IW „PAX”, Warszawa 1986, ISBN 83-211-0577-7

[4] M. Dzielska, *Hypatia z Aleksandrii*, audycja w Polskim Radiu, 05.2010, `http://www.youtube.com/watch?v=d-zd8dxlksk`, czas dostępu: 03.01.2012

[5] D. Karłowicz, *Kto zabił Hypatię z Aleksandrii?*, Rzeczpospolita, 19.05.2007

[6] M. Stańczyk, [*Prawie jak π ografia – Hypatia z Aleksandrii 4/3 w. p.n.e.*], Macierzator 2011, nr 42, s.2–3, ISSN (2083-9774) `http://knm.katowice.pl/macierzator/pliki/macierzator_042.pdf`, czas dostępu: 03.01.2012

Marek Biedrzycki, Weronika Siwek

***

Komentarz redaktor naczelnej: Niewątpliwą przewagą matematyki nad historią jest absolutny obiektywizm – wiele przekazów historycznych cechuje się niestety stronniczością, dodatkowo zależąc od wiedzy, pochodzenia, wyznania czy wykształcenia kronikarza; nie dziwi zatem, że istnieją źródła podważające zasługi Hypatii dla matematyki czy winę Cyryla za jej śmierć. Wiedząc, jak ważne jest dla Autorów powyższej polemiki, by pokazać historię Hypatii także w ujęciu historyków Kościoła Katolickiego, zdecydowałam się ją opublikować. Pragnę jednak wyraźnie podkreślić, że dwa pierwsze akapity prezentują ich subiektywną opinię.

Niektóre sformułowania w jednym z akapitów ubiegłomiesięcznej biografii być może nie były najszczęśliwsze; jeśli kogoś jakiekolwiek fragmenty tekstu uraziły – przepraszam. Cytowany przypis w wersji redaktorskiej zaznaczony był przeze mnie do usunięcia (nie ze względu na ewentualną możliwość nadinterpretacji, lecz dlatego, że nie był w mojej opinii związany z treścią artykułu); niestety, przy nanoszeniu ostatecznych poprawek nie zauważyłam, że do druku wysłana została wersja sprzed korekty (co zauważalne jest również m.in. w tytule – dodaliśmy Hypatii lat kilkaset). Przykro mi, że tak się stało, ufam jednak, że niedostateczna korekta w jednym artykule nie wpłynie na Państwa ogólną ocenę [Macierzatora].

[SuperMózg]

W nowym roku każdy z nas chce osiągnąć wiele nowych rzeczy. Nauczyć się nowego języka, przejść kolejną grę, udowodnić twierdzenie matematyczne, przejąć kontrolę nad światem – ot, zwykłe marzenia każdego człowieka. Dobrze byłoby jednak jakoś sobie w tym pomóc – jak by nie patrzeć, jest to początek już nie pierwszego roku naszego życia i znamy już ograniczenia naszych ciał, umysłów et caetera. Gdyby jednak istniała metoda na zniesienie pewnych ograniczeń... Na optymalniejsze wykorzystanie możliwości naszego mózgu, o których nieograniczoności wciąż i wciąż wszędzie czytamy? Okazuje się, że przynajmniej teoretycznie, istnieje kilka możliwości delikatnej optymalizacji.

Po pierwsze – sen. Nie zrozumcie mnie źle, ja uwielbiam leżeć w łóżku i spać, spać, spać, ale obiektywnie rzecz biorąc, sen zabiera nam co najmniej jedną trzecią czasu, który moglibyśmy poświęcić na dopracowywanie naszego planu stworzenia własnego imperium. Jak dużo snu tak naprawdę potrzebujemy? Dlaczego niektórzy kładą się po północy i są rześcy o szóstej rano, a inni muszą grzecznie chodzić spać po dobranocce i i tak nie da się ich wyciągnąć z łóżka na śniadanie? No cóż, nie jesteśmy w stanie powiedzieć dlaczego stan „domyślny" naszego umysłu tak się różni od osobnika do osobnika, ale istnieje metoda przełączenia go na nieco inny. Na ten, z którego – podobno – był znany Einstein. Nazywa się to „Planem Snu Nadczłowieka" i polega na ucinaniu sobie dwudziesto-, trzydziestominutowych drzemek co mniej więcej cztery godziny. Innymi słowy, daje to trzy godziny snu w ciągu doby. I da się to wprowadzić w życie każdego – ot, idźcie spać o 20, nastawcie sobie budzik na 20.30, wstańcie, zajmijcie się matematyką, wróćcie spać o północy, budzik 30 minut później... I tak dalej. Oczywiście, przez pierwsze dni każdy będzie półżywy – później jednak mózg przestawi się na tryb „oszczędnego snu". A jak to działa? Otóż, jak wiadomo, sen podzielony jest na fazy. Ogólnym konsensusem jest, że najważniejsza faza snu to faza REM – wtedy to do mózgu idą informacje „Ok, ta osóbka się wyspała i jest gotowa do kolejnego dnia pracy". Innymi słowy, bez fazy REM jesteśmy niewyspani, ale do poczucia wyspania potrzebujemy wyłącznie tejże fazy. Przestawienie na powyższy system spania zmusza mózg do włączania fazy REM natychmiast po położeniu się spać, zamiast, jak to robi zazwyczaj, na mniej więcej półtora godziny w środku nocy przy ośmiogodzinnym śnie. Zatem na początku będzie ciężko, nie ukrywamy, bo nie będziemy tej fazy REM mieć w ogóle (mózg w pół godziny nie „zaskoczy", że położyliśmy się spać) – ale po około dwóch tygodniach powinien załapać, o co chodzi. I tak po krótkim treningu będziesz, drogi Czytelniku, doświadczał nawet o pół godziny snu REM dziennie więcej niż przeciętny zjadacz chleba. Ha!

Dobrze, to umiemy już obciąć ilość snu dziennie do trzech godzin – to nie brzmi źle, ale wciąż jest to strata stu osiemdziesięciu minut, czyli jednego dobrego filmu. Kto wie, o ile inaczej potoczyłoby się nasze życie, gdybyśmy codziennie oglądali jeden film więcej! Trzeba coś z tymi trzema godzinami zrobić. Skoro nie da się ich wyeliminować, spróbujmy przynajmniej uczynić je mniej bezużytecznymi. Uwaga, coś nowego – one nie są bezużyteczne. Badania naukowców z Harvardu dowodzą, że podczas snu porządkują się informacje, które przyswoiliśmy w ciągu dnia. Wybrali oni trzy grupy ludzi, pokazali im pewną ilość zdjęć, którą ci ludzie mieli zapamiętać; jedni zostali przepytani ze znajomości zdjęć po 20 minutach, drudzy po sześciu godzinach, trzeci po dobie. Najlepiej wypadli ci przepytani po dobie – mimo że „na logikę" mogłoby się wydawać, że najlepsi będą ci przepytani „na świeżo". A tu klops, bo przepytani „na świeżo" wypadli najgorzej. Zatem nasz mózg potrzebuje swoich kilku godzin, aby móc wszystkie informacje ładnie poukładać w szufladki. Trudno. Jak długo jest dobrym i rzetelnym księgowym i nie ma bajzlu w tych szufladkach, jesteśmy gotowi wiele mu wybaczyć.

Ale jest z tym jeden problem. Otóż nasz mózg również może nas oszukać. Naturalnie nasuwają się tu rozmaite filozoficzne pytania, że jeśli mózg jest jedynym naszym połączeniem ze światem, to jak może nam przekazywać błędne informacje i skąd możemy wiedzieć, że są one błędne, et caetera et caetera – skończmy jednak te rozważania nim spadniemy w quasifilozoficzną spiralę, z której ciężko będzie się nam wyplątać. Skupmy się na tym, kiedy powinniśmy wierzyć informacjom z naszej własnej głowy. Odpowiedź jest prosta – nigdy, kiedy próbujemy cokolwiek sobie przypomnieć. Nasza pamięć jest dziurawa jak stare rzeszoto i przepraszamy wszystkie stare rzeszota za to niekorzystne porównanie. Ona sama jednak nigdy się do tego nie przyzna i z ochotą będzie łatać wszystkie dziury, jakie napotka... czymkolwiek, co jej wpadnie w ręce. Ta metafora troszkę wymyka się nam spod kontroli – spróbujmy zatem od początku.

W 1995 roku grupie ludzi opowiedziano cztery wydarzenia z ich dzieciństwa i poproszono o podanie różnych szczegółów na ich temat. Problem w tym, że jedno wydarzenie zostało wyssane z palca – wszystkim członkom badania sprzedano tę samą historyjkę, jak to za młodu zgubili się w wielkim centrum handlowym. I ponad 20 procent badanych nagle zaczęło na bieżąco „wspominać" nieistniejące wydarzenie, podając różne szczegóły, które przecież wymyślali na miejscu. W innym badaniu zaprowadzono kilku klientów Disneylandu do pokoju, w którym na ścianach widniały kartonowe podobizny Królika Bugsa (w innej wersji tegoż eksperymentu ludziom pokazano fałszywe reklamy Disneylandu z Bugsem) – i 40 procent z badanych twierdziło z uporem maniaka, że podczas swego pobytu w tymże parku rozrywki widzieli osobę za Bugsa przebraną. Mimo że[1] Królik Bugs nie jest postacią disneyowską i stąd nie ma go w Disneylandzie!

Jak to działa? Oczywistym jest, że nie zapamiętujemy każdego szczegółu z naszego życia – nasz mózg, przyswajając każdą informację, odrzuca te części, które uzna za nieistotne, pozostawiając tylko to, co ważne. Problem w tym, że źródło, z którego pochodzi dana informacja, często jest przez nasz mózg uznawane za właśnie tę „nieistotną” część. Owszem, pamiętamy adres naszego przyjaciela, ale nie pamiętamy dnia tygodnia ani miejsca, w którym się tego dowiedzieliśmy; pamiętamy, jak brzmi twierdzenie Hahna-Banacha, ale nie pamiętamy, na wykładzie z jakiego przedmiotu usłyszeliśmy je po raz pierwszy. Problemem jest to, że w ten sam sposób fakt, który – według nas – poznaliśmy w szanowanej książce matematycznej tak naprawdę może pochodzić z Wikipedii, innej książki, albo po prostu z ust studenta, który zrobił sobie na nas brzydki żart.

Oczywiście, jeszcze brzydszym żartem byłoby sfabrykowanie pamięci wszystkich swoich znajomych, by jak najszczegółowiej pamiętali hołd wierności, który nam złożyli. Nie żebyśmy do tego kogokolwiek namawiali. Absolutnie nie. Każdy powinien grzecznie spać osiem godzin dziennie, uczyć się tuż przed egzaminem i wierzyć wierności swej pamięci. Któż wie, co inaczej mogłoby się wydarzyć?

Niewinny Rosomak

[Matematyczny Limeryk]

autor: Leigh Mercer

Jakie wiersze piszą liczby? Najczęściej limeryki. Zapytacie „Że niby co?”, a ja podam ten piękny przykład, który porusza struny w mej duszy, o których istnieniu nawet nie wiedziałem:

$$\frac{12 + 144 + 20 + 3\sqrt{4}}{7} + (5 \times 11) = 9^2 + 0.$$

Ach, jakie to piękne! Azali nie rozumiecie? Przetłumaczę to zatem na nieco zwyklejszy język (w tym przypadku – angielski):

A dozen, a gross, and a score
Plus three times the square root of four
Divided by seven
Plus five times eleven
Is nine squared and not a bit more.

[1] Tę informację podajemy na wypadek gdyby któryś z naszych Czytelników miał z kulturą masową równie bliski kontakt jak nasza redaktor naczelna...

[Zaproszenie na I Sympozjum]

Koła Naukowego Antropologii Literatury Uniwersytetu Śląskiego
oraz Koła Naukowego Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

Zapraszamy wszystkich zainteresowanych na I Sympozjum Koła Naukowego Antropologii Literatury UŚ i Koła Naukowego Matematyków UŚ, zatytułowane

Pragnienie Przestrzeni. Mathema a humanitas.

Spotkanie otworzy wykładem „Przestrzeń topologiczna" prof. dr hab. Jerzy Mioduszewski – profesor matematyki specjalizujący się w zakresie topologii, pasjonat historii matematyki. Po wykładzie odbędzie się dyskusja, w której udział wezmą: dr hab. Leszek Zwierzyński – literaturoznawca, zajmujący się m.in. interpretacją, geopoetyką, hermeneutyką, opiekun Koła Naukowego Antropologii Literatury UŚ oraz członkowie obu Kół.

Sympozjum odbędzie się w środę **18 stycznia 2012 r.**, o godzinie 13.45, w sali seminaryjnej 554 Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego przy ul. Bankowej 14 w Katowicach. Zapraszamy wszystkich.

Z organizatorami spotkania można skontaktować się e-mailowo (pod adresem `sympozjum@knm.katowice.pl`) lub osobiście: z Pawłem Paszkiem, przewodniczącym Koła Naukowego Antropologii Literatury UŚ, w pokoju 202 w Instytucie Nauk o Kulturze UŚ, natomiast z Joanną Zwierzyńską, przewodniczącą Koła Naukowego Matematyków UŚ, w pokoju 524 w Instytucie Matematyki UŚ.

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Tomasz Kochanek, Mateusz Jurczyński, Beata Łojan, Magdalena Nowak, Marek Biedrzycki, Weronika Siwek, Mikołaj Stańczyk.
Projekt okładki: Anna Jacek
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

`macierzator@knm.katowice.pl`.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`.
Wydanie elektroniczne [Macierzatora] posiada numer ISSN: 2083-9774.

styczeń 2012

[Kącik TEXowy część 6]

Matematyka — podstawowe informacje cz.2

W poprzedniej części pokazaliśmy jak umieszczać wzory w tekście. W tej części ciąg dalszy różnego rodzaju przydatnych poleceń oraz kilka słów o definiowaniu własnych operatorów matematycznych. Na koniec zestawienie podstawowych symboli.

Beata Łojan (`b.lojan@knm.katowice.pl`)

over and under. W poprzedniej części Kącika TEXowego poznaliśmy dwa polecenia, do umieszczania wielolinijkowych indeksów (`\substack` i otoczenie `subarray`). Innym sposobem umieszczania symboli pod/nad określonym obiektem jest użycie jednej z instrukcji `\overset` i `\underset` lub `\stackrel`.

over&under.tex

```
\stackrel{def}{=}
\overset{nad}{tekst}
\underset{pod}{tekst}
```

over&under.pdf

$$\stackrel{def}{=},\quad \overset{nad}{tekst},\quad \underset{pod}{tekst}$$

W poleceniach tych pierwszy argument składany jest mniejszą czcionką. Dostępne są również polecenia umieszczające poziome nawiasy klamrowe, linie czy strzałki nad/pod symbolami czy tekstem.

over&under2.tex

```
\widetilde{ABC}, \widehat{ABC}, \overline{ABC},  \underline{ABC}
\overleftarrow{ABC}, \underleftarrow{ABC} \overrightarrow{ABC},
\underrightarrow{ABC} \overbrace{ABC}, \underbrace{ABC}
```

over&under2.pdf

$$\widetilde{ABC}\ \widehat{ABC}\ \overline{ABC}\ \underline{ABC}\ \overleftarrow{ABC}\ \underleftarrow{ABC}\ \overrightarrow{ABC}\ \underrightarrow{ABC}\ \overbrace{ABC}\ \underbrace{ABC}$$

Poniżej przedstawiamy bardziej skomplikowany przykład zastosowania powyższych poleceń:

przyklad.tex

```
\begin{equation*}\underbrace{
x_1+\overbrace{x_2+\dots+x_{n-1}}^
{(n-2)\text{-elementów}}+x_n}_{
n\text{-elementów}}\end{equation*}
```

przyklad.pdf

$$\underbrace{x_1+\overbrace{x_2+\dots+x_{n-1}}^{(n-2)\text{-elementów}}+x_n}_{n\text{-elementów}}$$

Nawiasy i inne ograniczniki. Nawiasy okrągłe i kwadratowe możemy wpisać bezpośrednio z klawiatury, nawiasy klamrowe wpisujemy za pomocą `\{` i `\}`, symbol wartości bezwzględnej uzyskujemy za pomocą *pionowej kreski* `|` (ang. *pipe*), a symbol normy $\|$ poprzez `\|`. Dodatkowo możemy wpłynąć na ich wielkość, poprzedzając wybrany ogranicznik otwierający poleceniem `\left`, a zamykający `\right`; instrukcje te w sposób automatyczny dobierają rozmiar ograniczników w zależności od wielkości wyrażenia zawartego między nimi. Należy również pamiętać, że każdy nawias otwierający poprzedzony poleceniem `\left` wymaga zastosowania nawiasu zamykającego poprzedzonego poleceniem `\right`. A co jeśli chcemy umieścić nawias tylko po jednej stronie? Wówczas symbol wybranego przez nas ogranicznika należy „zastąpić” kropką.

nawiasy.tex

```
$$\left( \lim\limits_{n\rightarrow
\infty} 1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$
$$\left\{\sum\limits_{n=1}^N
\frac{1}{n^2}\right.
\left. \sum_{n=1}^N
\frac{3n}{n^2+4} \right]$$
```

nawiasy.pdf

$$\left(\lim\limits_{n\rightarrow\infty} 1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$
$$\left\{\sum\limits_{n=1}^N \frac{1}{n^2}\right. \left. \sum_{n=1}^N \frac{3n}{n^2+4} \right]$$

Możliwe jest również „ręczne” określenie wielkości nawiasu za pomocą jednej z instrukcji: `\big`, `\Big`, `\bigg`, `\Bigg`, którą poprzedzamy wybrany ogranicznik.

nawiasy2.tex

```
$\big(\Big(\bigg(\Bigg($\quad
$\big\}\Big\}\bigg\}\Bigg\}$\quad
$\big\|\Big\|\bigg\|\Bigg\|$ \quad
$\big[\Big[\bigg[\Bigg[$
```

nawiasy2.pdf

$\big(\Big(\bigg(\Bigg($ $\quad$ $\big\}\Big\}\bigg\}\Bigg\}$ $\quad$ $\big\|\Big\|\bigg\|\Bigg\|$ $\quad$ $\big]\Big]\bigg]\Bigg]$

Fantomy. LaTeX dostarcza nam również polecenia `\phantom`, które rezerwuje miejsce na znaki, które nie pojawią się w wydruku. Instrukcja ta pozwala „poprawić” odstępy w pionie, przy wyrównywaniu tekstu z indeksami dolnymi i górnymi.

phantom.tex

```
$$ {}_1^{10} X \qquad
{}_{\phantom{1}1}^{10} X$$
```

phantom.pdf

$${}_1^{10} X \qquad {}_{1}^{10} X$$

Własne operatory matematyczne Pakiet `amsmath` pozwala na deklarowanie własnych operatorów matematycznych za pomocą instrukcji

```
\DeclareMathOperator{\moja_nazwa}{operator},
```

gdzie *operator*, to symbol który pojawi się za każdym razem gdy użyjemy naszego nowego polecenia `\moja_nazwa`. Dostępna jest również wersja gwiazdkowa `\DeclareMathOperator*`, która działa z tą różnicą, że przy pisaniu wzorów eksponowanych indeksy będą domyślnie umieszczane pod i nad symbolem — w przeciwieństwie do wersji bez gwiazdki. Deklaracja nowych poleceń umieszczamy w preambule dokumentu, a tak nowo stworzonych instrukcji używamy w trybie matematycznym.

operatory.tex

`\DeclareMathOperator{\NWD}{NWD}`	`$\NWD$`	NWD
`\DeclareMathOperator{\supp}{supp}`	`$\supp_{n=1}$`	$\operatorname{supp}_{n=1}$
`\DeclareMathOperator*{\ABC}{ABC}`	`$\ABC_{12}^{ij}$`	$\operatorname*{ABC}_{12}^{ij}$

[Zestawienie symboli matematycznych]

Poniżej zestawienie podstawowych symboli matematycznych dostępnych w LaTeXu. Wszystkie poniższe symbole będą dostępne, po dołączeniu pakietów `amssymb`, `amsmath`[2]. Ponadto dostępnych jest wiele innych pakietów dostarczających bardziej „wymyślnych” symboli (np. `stmaryrd`, `MnSymbol` czy `mathdesign`)[3].

$\hat{a}$	`\hat{a}`	$\grave{a}$	`\grave{a}`	$\dot{a}$	`\dot{a}`	$\tilde{a}$	`\tilde{a}`	$\bar{a}$	`\bar{a}`
$\check{a}$	`\check{a}`	$\acute{a}$	`\acute{a}`	$\ddot{a}$	`\ddot{a}`	$\breve{a}$	`\brave{a}`	$\vec{a}$	`\vec{a}`

Tabela 6.1: Akcenty matematyczne

sin	`\sin`	cos	`\cos`	tan, tg	`\tan`, `\tg`	cot, ctg	`\cot`, `\ctg`
arcsin	`\arcsin`	arccos	`\arccos`	arctan	`\arctan`	dim	`\dim`
exp	`\exp`	ln	`\ln`	log	`\log`	det	`\det`
sup	`\sup`	inf	`\inf`	min	`\min`	max	`\max`
lim	`\lim`	lim sup	`\limsup`	lim inf	`\liminf`	ker	`\ker`
$a \pmod{b}$		`a\pmod{b}`		$a \bmod b$		`a\bmod b`	

Tabela 6.2: Funkcje

$\leftarrow$	`\leftarrow, \gets`	$\longleftarrow$	`\longleftarrow`	$\uparrow$	`\uparrow`
$\rightarrow$	`\rightarrow, \to`	$\longrightarrow$	`\longrightarrow`	$\downarrow$	`\downarrow`
$\leftrightarrow$	`\leftrightarrow`	$\longleftrightarrow$	`\longleftrightarrow`	$\updownarrow$	`\updownarrow`
$\Leftarrow$	`\Leftarrow`	$\Longleftarrow$	`\Longleftarrow`	$\Uparrow$	`\Uparrow`
$\Rightarrow$	`\Rightarrow`	$\Longrightarrow$	`\Longrightarrow`	$\Downarrow$	`\Downarrow`
$\Leftrightarrow$	`\Leftrightarrow`	$\Longleftrightarrow$	`\Longleftrightarrow, \iff`	$\Updownarrow$	`\Updownarrow`
$\mapsto$	`\mapsto`	$\longmapsto$	`\longmapsto`	$\nearrow$	`\nearrow`
$\hookleftarrow$	`\hookleftarrow`	$\hookrightarrow$	`\hookrightarrow`	$\searrow$	`\searrow`
$\leftharpoonup$	`\leftharpoonup`	$\rightharpoonup$	`\rightharpoonup`	$\swarrow$	`\swarrow`
$\leftharpoondown$	`\leftharpoondown`	$\rightharpoondown$	`\rightharpoondown`	$\nwarrow$	`\nwarrow`
$\dashleftarrow$	`\dashleftarrow`	$\dashrightarrow$	`\dashrightarrow`	$\rightsquigarrow$	`\rightsquigarrow`
$\leftleftarrows$	`\leftleftarrows`	$\rightrightarrows$	`\rightrightarrows`	$\upuparrows$	`\upuparrows`
$\leftrightarrows$	`\leftrightarrows`	$\rightleftarrows$	`\rightleftarrows`	$\downdownarrows$	`\downdownarrows`
$\leftrightsquigarrow$	`\leftrightsquigarrow`	$\rightsquigarrow$	`\rightsquigarrow`		

Tabela 6.3: Strzałki

Mamy również do dyspozycji strzałki, które automatycznie dopasowują swoją długość do tekstu, który znajduje się nad/pod nimi.

strzalki auto.tex

```
$\xrightarrow[tekst pod strzałką]{nad strzałką}$
$\xleftarrow[tekst pod strzałką]{nad strzałką}$
```

strzalki.tex

```
$\xrightarrow[n\rightarrow \infty]
{k,l\in\mathbb{N}}$
$\xleftarrow{\text{wynika}}$
$\xlefttarrow[\text{dla każdego}N]{}$
```

strzałki.pdf

$\xrightarrow[n\rightarrow\infty]{k,l\in\mathbb{N}}$ $\xleftarrow{\text{wynika}}$ $\xleftarrow[\text{dla każdego } N]{}$

[2] Jak już wspomnieliśmy, rozpoczynając pisanie tekstu zawierającego wzory matematyczne, wygodnie jest od razu dołączyć pakiety `amsmath`, `amssymb`, `amsthm`, `amsfont`.

[3] Zestawienie większości dostępnych symboli wraz z nazwami pakietów jakie należy dołączyć można znaleźć w „The Comprehensive LaTeX Symbol List” autorstwa Scotta Pakina – skrypt dostępny m.in.: na stronach GUST czy CTAN.

α	`\alpha`	θ	`\theta`	o	`o`	τ	`\tau`
β	`\beta`	ϑ	`\vartheta`	π	`\pi`	υ	`\upsilon`
γ	`\gamma`	ι	`\iota`	ϖ	`\varpi`	φ	`\phi`
δ	`\delta`	κ	`\kappa`	ρ	`\rho`	φ	`\varphi`
ϵ	`\epsilon`	λ	`\lamda`	ϱ	`\varrho`	χ	`\chi`
ε	`\varepsilon`	μ	`\mu`	σ	`\sigma`	ψ	`\psi`
ζ	`\zeta`	ν	`\nu`	ς	`\varsigma`	ω	`\omega`
η	`\eta`	ξ	`\xi`				
Γ	`\Gamma`	Λ	`\Lambda`	Σ	`\Sigma`	Ψ	`\Psi`
Δ	`\Delta`	Ξ	`\Xi`	Υ	`\Upsilon`	Ω	`\Omega`
Θ	`\Theta`	Π	`\Pi`	Φ	`\Phi`		

Tabela 6.4: Litery alfabetu greckiego

$<$	`<`	$>$	`>`	$=$	`=`
$\leqslant$	`\leq`	$\geqslant$	`\geq`	$\equiv$	`\equiv`
$\ll$	`\ll`	$\gg$	`\gg`	$\doteq$	`\doteq`
$\prec$	`\prec`	$\succ$	`\succ`	$\sim$	`\sim`
$\preceq$	`\preceq`	$\succeq$	`\succeq`	$\simeq$	`\simeq`
$\subset$	`\subset`	$\supset$	`\supset`	$\approx$	`\approx`
$\subseteq$	`\subseteq`	$\supseteq$	`\supseteq`	$\cong$	`\cong`
$\sqsubset$	`\sqsubset`	$\sqsupset$	`\sqsupset`	$\Join$	`\Join`
$\sqsubseteq$	`\sqsubseteq`	$\sqsupseteq$	`\sqsupseteq`	$\bowtie$	`\bowtie`
$\in$	`\in`	$\ni$	`\ni`	$\propto$	`\propto`
$\vdash$	`\vdash`	$\dashv$	`\dashv`	$\models$	`\models`
$\mid$	`\mid`	$\parallel$	`\parallel`	$\perp$	`\perp`
$\smile$	`\smile`	$\frown$	`\frown`	$\asymp$	`\asymp`

Tabela 6.5: Symbole relacji

Symbole negacji powyższych symboli tworzymy poprzedzając je instrukcją `\not`. Mamy również polecenie `\colon`, które tworzy zwykły dwukropek, różnica jednak zauważalna jest w odstępach jakie LaTeX robi w przypadku użycia zwykłego dwukropka wpisanego wprost z klawiatury, a tego zapisanego za pomocą polecenia `\colon`.

colon.tex

```
$f:X \to Y$, $f\colon X \to Y$
```

colon.pdf

$f:X \to Y$, $f\colon X \to Y$

$\pm$	`\pm`	$\mp$	`\mp`	$\cdot$	`\cdot`	$\div$	`\div`
$\times$	`\times`	$\ltimes$	`\ltimes`	$\rtimes$	`\rtimes`	$\setminus$	`\setminus`
$\circ$	`\circ`	$\bullet$	`\bullet`	$\star$	`\star`	$\ast$	`\ast`
$\cup$	`\cup`	$\cap$	`\cap`	$\sqcup$	`\sqcup`	$\sqcap$	`\sqcap`
$\oplus$	`\oplus`	$\ominus$	`\ominus`	$\odot$	`\odot`	$\otimes$	`\otimes`
$\boxplus$	`\boxplus`	$\boxminus$	`\boxminus`	$\boxdot$	`\odot`	$\boxtimes$	`\boxtimes`
$\triangleleft$	`\triangleleft`			$\triangleright$	`\triangleright`		

Tabela 6.6: Operacje dwuargumentowe

$\dots$	`\dots`	$\cdots$	`\cdots`	$\vdots$	`\vdots`	$\ddots$	`\ddots`
$\Re$	`\Re`	$\Im$	`\Im`	$\aleph$	`\aleph`	ℓ	`\ell`
$\forall$	`\forall`	$\exists$	`\exists`	∞	`\infty`	$\emptyset$	`\emptyset`

Tabela 6.7: Inne symbole