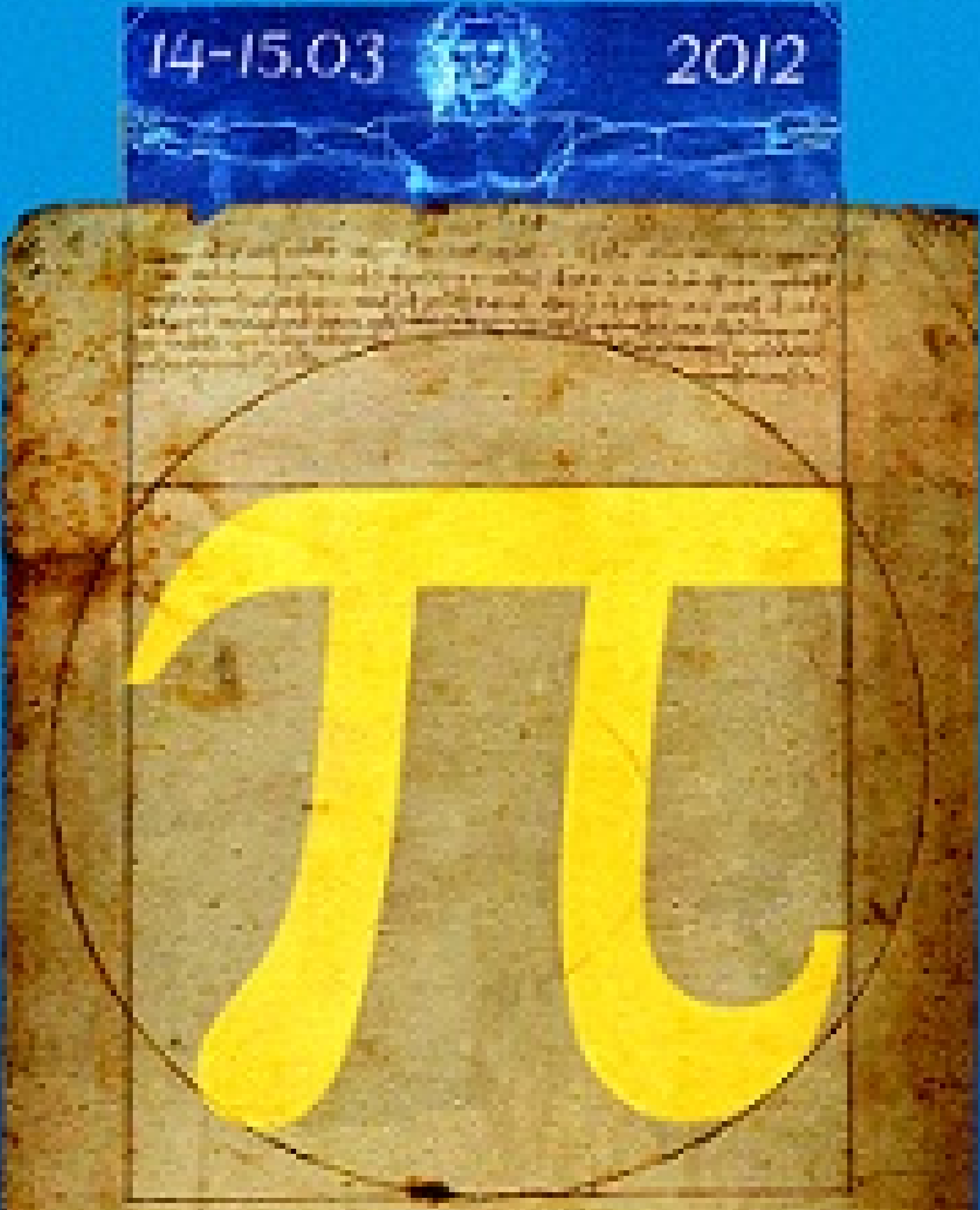


[π-MACIERZATOR]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

ISSN 2083-9774

[VI ŚWIĘTO LICZBY π — 14 marca 2012 r.]

w Instytucie Matematyki UŚ

HARMONOGRAM

9:00 – 15:00	Warsztaty KNM UŚ
9:42 – 10:30	Uroczyste otwarcie **VI Święta Liczby π** – SA III, Instytut Fizyki. Powitanie przez Dziekana Wydziału prof. dra hab. Macieja Sablika oraz wykład inauguracyjny prof. dra hab. n. med. Edwarda Wylęgały.
10:00 – 14:00	Pokazy matematyczne, fizyczne i chemiczne (s. 221) I LO im. M.Kopernika w Katowicach, mgr Bożena Koprowska I ZSS im. S.Konarskiego Społecznego Tworzystwa Oświatowego Katowice
10:30 – 11:15	*Modele i gry* – dr hab. Tomasz Połacik
10:30 – 14:00	Pokazy Pałacu Młodzieży (s. 228) – mgr Dorota Kolany
11:30 – 12:15	*Jak Kolumb trafił do Ameryki* – mgr Łukasz Dawidowski
12:00 – 14:00	Finał konkursu *Rozkosze Łamania Głowy* (s. 227) Pałac Młodzieży, mgr Dorota Kolany
12:00 – 14:00	Finał konkursu *Mistrz Matematyki* (s. 420) Gimnazjum nr 21 w Katowicach, mgr Aurelia Tomaszewska
12:30 – 13:15	*Więźniowie i podróżnicy, czyli o dylematach w teorii gier* – Magdalena Nowak
13:30 – 14:15	*Zostań administratorem* – dr Jolanta Sobera

WARSZTATY KNM

sala 215:	**Pracownia komputerowa** – warsztaty cykliczne: 10:30, 12:00; Piotr Idzik
sala 216:	**Szyfrowanie klasyczne** – warsztaty cykliczne: 10:30, 12:00, 13:30; Marek Biedrzycki, mgr Weronika Siwek
sala 225:	**Fraktale** – warsztaty cykliczne: 10:30, 12:00, 13:30; Adrianna Świeczak, Mateusz Szymański, Paweł Bialas
sala 233:	**π-lionerzy** – konkurs: 10:30 – 12:00, 12:30 – 14:30; Konrad Jałowiecki, mgr Radosław Łukasik
sala 429:	**Świat wielościanów** – warsztaty cykliczne: 10:30, 12:30; Beata Łojan
sala 429:	**Algorytmy** – warsztaty cykliczne: 11:30, 13:30; Sabina Wrońska
sala 208:	**Zagadki logiczne** – warsztaty o charakterze ciągłym: 9:00 – 15:00; Anna Jacek, Marcin Jenczmyk, Barbara Małek
sala 224:	**Kawiarnia Szkocka** – warsztaty o charakterze ciągłym: 9:00 – 15:00; mgr Wojciech Bielas, Magdalena Nowak, Magdalena Sitko
sala 226:	**Kasyno** – warsztaty o charakterze ciągłym: 9:00 – 15:00; Mikołaj Stańczyk, Justyna Świątkowska

[Dylemat więźnia, czyli o wadach racjonalności]

Wyobraźmy sobie następującą sytuację: pojawiamy się (w roli słuchacza!) na pierwszych w nowym semestrze zajęciach z nowego przedmiotu. Wykładowca wita wszystkich, po czym dzieli grupę na pary i każe... wyciągnąć karteczki! Kolokwium? Na pierwszych zajęciach? Nie, w tym semestrze problem ocen zostanie rozwiązany w prostszy sposób. Każdy ze studentów musi napisać na kartce jedną z liter – A lub B – i to ona zadecyduje o jego ocenie końcowej. Co jednak, gdy nasz wybór (a może nawet każdy wybór!) okaże się równoznaczny z niezaliczeniem przedmiotu? Spokojnie – o przypadkowości nie ma tu mowy, bo wykładowca natychmiast informuje o skutkach wpisania każdej z liter. Nie obędzie się oczywiście bez pewnego utrudnienia. Cała grupa zostaje podzielona na pary (bez straty ogólności zakładamy parzystość liczby studentów na sali), a nasza ocena zależeć będzie również od tego, co wpisze nasz sąsiad. Dodatkowy haczyk: nie możecie się ze sobą konsultować.

- Jeżeli oboje wybierzecie A, to każde z was dostanie ocenę dobrą.
- Jeżeli oboje wybierzecie B, to każde z was dostanie ocenę dostateczną.
- Jeżeli jedno z was wybierze A, a drugie B, to pierwsza osoba dostanie ocenę bardzo dobrą, druga – dostateczną.

Brzmi nieprawdopodobnie? Witamy na pierwszym wykładzie z teorii gier[1].

Powyższa sytuacja to przeniesienie na grunt studencki jednego z najbardziej znanych problemów w teorii gier, zwanego dylematem więźnia. W wersji klasycznej dylemat więźnia przedstawia się następująco:

Dwóch przestępców zostaje zatrzymanych, jednak policja nie ma dość dowodów, aby postawić zarzuty któremukolwiek z nich. Podczas osobnych przesłuchań proponują zatem każdemu z więźniów następującą ofertę – jeżeli złożą zeznania przeciwko swojemu wspólnikowi, a on ich nie obciąży, wyjdą na wolność, a wspólnik pójdzie na pół roku do więzienia. Jeżeli obaj będą milczeć, zostaną skazani na zaledwie miesiąc pozbawienia wolności. W sytuacji, gdy doniosą na siebie nawzajem, każdy z nich trafi do więzienia na trzy miesiące. Więźniowie podejmują decyzję niezależnie i nie wiedzą o tym, jakiego wyboru dokonał ich wspólnik.

Zakładamy, że każdy z więźniów dąży do zmniejszenia swojego wyroku (założenie dość oczywiste) i nie przejmuje się tym, co stanie się z jego wspólnikiem (założenie mniej oczywiste, jednak w wielu sytuacjach całkiem naturalne). Jakie jest najlepsze wyjście z tej sytuacji?

Aby nieco usystematyzować naszą wiedzę na temat problemu, wszystkie możliwe wyniki przedstawmy w tabeli, którą roboczo nazwiemy „macierzą wypłat”. Wypłaty – pary liczb w poszczególnych komórkach – oznaczają

[1] ...który odbył się na Uniwersytecie Yale w 2007 roku.

liczbę miesięcy, na którą trafi w danym przypadku do więzienia każdy z więźniów.

	milczenie	zeznanie
milczenie	1, 1	6, 0
zeznanie a	0, 6	3, 3

Załóżmy zatem, że decydujemy się milczeć. W najlepszym przypadku – gdy milczeć będzie również nasz wspólnik – trafimy do więzienia na miesiąc. Jeżeli jednak wspólnik zdecyduje się mówić, trafimy do więzienia aż na pół roku. Co stanie się, jeśli zdecydujemy się zeznawać? W najgorszym przypadku (ponownie wtedy, gdy współpracować z policją będzie także drugi przestępca) trafimy do więzienia na trzy miesiące, jeśli jednak zdecyduje się on milczeć, zyskujemy najwięcej – zostajemy zwolnieni z aresztu.

Nie trzeba długiego namysłu, aby zauważyć, że kooperacja z policją daje wynik lepszy niż milczenie. Niezależnie od tego, co zrobi drugi z przestępców, w przypadku złożenia zeznań zawsze znajdujemy się w lepszej sytuacji. W najlepszym przypadku całkowicie unikamy kary, jeżeli zaś wspólnik zdecydowałby się nas wydać – trafimy do więzienia na trzy miesiące (gdybyśmy milczeli, wyrok byłby dwa razy dłuższy). Mówimy, że strategia zakładająca współpracę jest ściśle dominująca – zapewnia najlepszy wynik niezależnie od decyzji przeciwnika.

Wciąż brakuje nam jednak pewnej kluczowej informacji – jakie jest prawdopodobieństwo tego, że nasz wspólnik wybierze strategię, która pozwoli nam wyjść na wolność? Niestety, jeżeli gracz postępuje racjonalnie, również będzie zeznawał. W teorii gier racjonalność oznacza bowiem dążenie do maksymalizacji własnego zysku (w tym przypadku – minimalizacji wyroku), a zalety postępowania zgodnie ze strategią ściśle dominującą wymienione zostały w poprzednim akapicie[2].

Jak widać, dla każdego z przestępców jedynym słusznym wyborem jest złożenie zeznań na niekorzyść drugiego. Pozwala on na największy zysk (wyjście na wolność) i wyeliminowanie największej straty (pół roku więzienia). Gdy wszyscy gracze przyjmą optymalną strategię, mówimy o równowadze Nasha. W tej sytuacji zmiana wyłącznie własnej decyzji nie przyniesie żadnego zysku żadnemu z nich.

Przyjrzyjmy się jednak jeszcze raz macierzy wypłat. Jak widać, równowaga Nasha (obaj przestępcy zeznają) nie jest strategią, która ostatecznie przynosi najlepszy wynik. Jeżeli obaj więźniowie postępują racjonalnie i decydują się zeznawać przeciwko sobie, ich wyrok będzie wyższy niż w przypadku, gdyby wspólnie milczeli. Równowaga Nasha nie jest bowiem strategią

[2]założenie racjonalności można zastąpić założeniem o czytaniu [Macierzatora].

Pareto-optymalną, to znaczy taką, że niemożliwe jest jej poprawienie – dobór strategii bardziej korzystnej dla przynajmniej jednego z graczy – bez pogorszenia sytuacji innego.

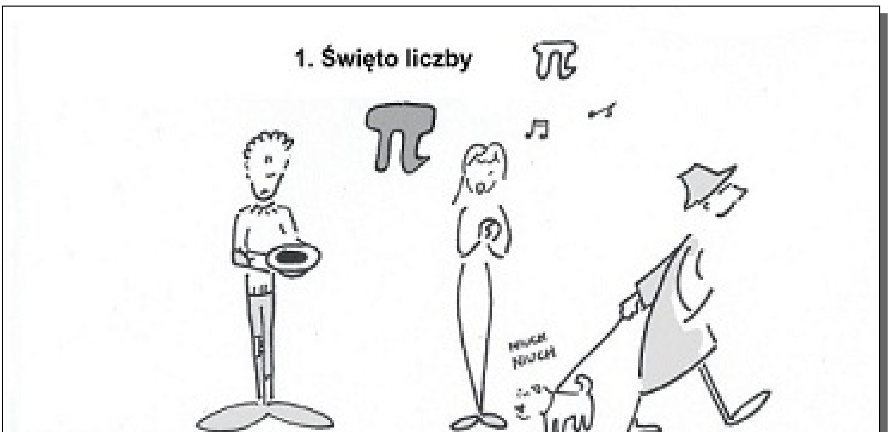
Podsumowując: racjonalną strategią w dylemacie więźnia jest współpraca z policją, jednak gdy stosują ją obaj gracze, uzyskują oni gorszy rezultat niż gdyby zachowali milczenie. Oczywiście, jak wskazuje otwierający artykuł studencki przykład, sytuację tę można modyfikować i uogólniać – przy zachowaniu odpowiednich zasad. W ogólnej postaci grę można przedstawić następująco: gracze 1 i 2 bez porozumienia ze sobą muszą wybrać jedną z możliwości: oszukuj lub współpracuj. Macierz wypłat ma postać:

	współpracuj	oszukuj
współpracuj	B, B	D, A
oszukuj a	A, D	C, C

gdzie $A > B > C > D$ – te warunki pozwalają na rozwój sytuacji analogiczny do powyższego.

Dylemat więźnia w swojej klasycznej formie został sformułowany i sformalizowany w 1992 roku przez Alberta W. Tuckera. Jego początki sięgają jednak 1950 roku, gdy Merrill Flood i Melvin Dresher, matematycy pracujący dla RAND Corporation, organizacji badawczej stworzonej na potrzeby Sił Zbrojnych Stanów Zjednoczonych, którzy próbowali zastosować narzędzia teorii gier do opracowywania strategii zbrojeń nuklearnych. Zagadnienie to przenoszono również z powodzeniem nie tylko na grunt ekonomii czy psychologii. Analizy opierające się o dylemat więźnia pojawiają się także w marketingu, ekologii, a nawet przy badaniach dotyczących teleturniejów telewizyjnych.

Magdalena Nowak



[Rajd po historii zastosowań matematyki]

Za książką „Oswajanie nieskończoności” Iana Stewarta

Kolejne Święto π, kolejne wykłady, kolejne warsztaty, kolejny [Macierzator]. Kolejne dziesiątki informacji do przyswojenia o matematyce nowszej i starszej, o rzeczach ciekawych i... bardziej ciekawych, o rzeczach zaskakujących i tych, których można się było spodziewać. Jednak patrząc z zewnątrz, człowieka nachodzi refleksja: jak to powstało? Co kierowało ludźmi, kiedy z trójkąta zrobili czworościan, z czworościanu bryłę czterowymiarową, z tego przestrzeń o nieskończonej liczbie wymiarów? Kto pierwszy wpadł na pomysł, że dobrym matematycznym odzwierciedleniem rzeczywistości jest równanie różniczkowe? I jak dużą motywacją w tych rozważaniach było odzwierciedlanie rzeczywistości właśnie, a jak dużą zwykła intelektualna ciekawość?

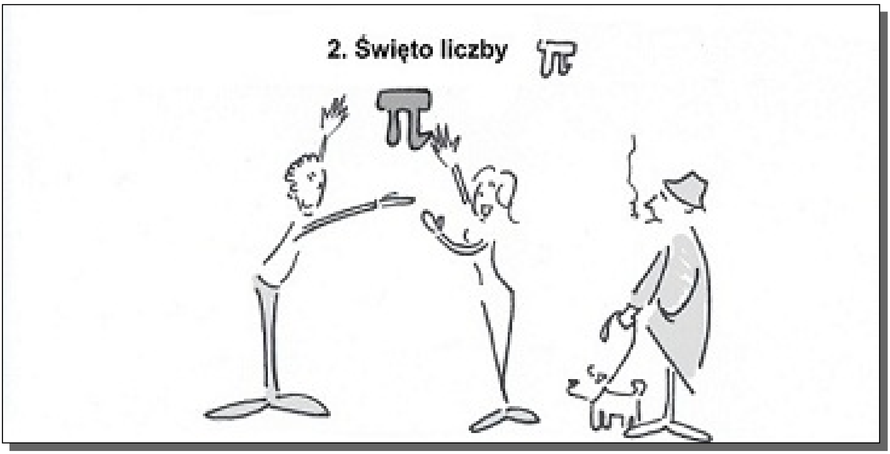
W czasach starożytnych matematyka zdecydowanie mocno odbiegała od tego, co mamy teraz – dziś kilkuletnie dziecko przyjmuje istnienie „źero” za oczywistość i ma zapis dziesiętny, umożliwiający mu spisanie praktycznie każdej liczby, jaka mu przyjdzie na myśl. Ale kiedyś trzeba to było stworzyć. A, jak mawiał Bertrand Russel, głębia abstrakcji dzieląca pojęcie „pięciu krów” od liczby „pięć” potrafi przyprawić o zawrót głowy[3]. Z drugiej strony, nie ma nic bardziej mylnego niż stwierdzenie że w czasach starożytnych matematyka była potrzebna tylko do zliczania wszelakiego bydła czy do handlowania. Właściwie cała magia starożytnych kapłanów i mistycyzm otaczający w wielu cywilizacjach tę edukowaną kastę był po prostu wyższą matematyką, a zmyślność i precyzja z jaką potrafili oni przewidywać zaćmienia Słońca i inne ruchy ciał niebieskich nierzadko zaskakuje dzisiejszych badaczy. A czym były te niezwykłe metody wyższej matematyki, znane jedynie najtęższym umysłom starożytności? Mogły to być tak proste rzeczy, jak choćby ułamki. Dzisiaj mawiamy, że dzielenie jest operacją odwrotną do mnożenia i wiemy, że jeśli mamy liczbę 2, to mamy też liczbę $\frac{1}{2}$ i mają one dokładnie takie same prawa. Ale kiedyś nie było to w ogóle takie oczywiste, nawet pomimo faktu że już w starożytnym Babilonie da się zaobserwować odpowiednik naszego dzisiejszego zapisu dziesiętnego („po przecinku”).

Ogromną różnicą między dzisiejszym podejściem do matematyki a tym starożytnym jest mistycyzm wokół tej nauki. Prawie wszyscy słyszeli o pitagorejczykach, którzy liczby traktowali praktycznie rzecz biorąc jak religię. Legenda głosi, że gdy pewien Grek odkrył, że pierwiastek z dwóch nie jest liczbą wymierną, pitagorejczycy w gniewie rozszarpali bluźniercę na strzępy i poprzysięgli, że ta zakazana wiedza nie opuści ich szeregów. Oczywiście, legenda ta ma wiele wersji – w mniej krwawej odkrywca został zamordowany

[3]Mogła to też być głębia abstrakcji dzieląca „dwa stoły” od liczby „dwa”, ale wiadomo o co chodzi.

po to, by Pitagoras mógł sobie jego odkrycie przywłaszczyć. Tak czy siak, gdyby dzisiaj ktoś wstał i oznajmił „Liczba JAKAŚ jest SIAKAŚ” to, w zależności od wagi tego odkrycia, mógłby z tego zrobić publikację w czasopiśmie, może dostałby jakąś nagrodę, kto wie, może nawet w jakichś wieczornych regionalnych wiadomościach pojawiłaby się o nim krótka wzmianka – ale myślę, że możemy z dużą dozą prawdopodobieństwa przypuścić, że nie musiałby się on obawiać o swoje życie. Dodatkowo, dla znakomitej większości ludzkości liczba 5 i liczba 578439 nie różnią się zbyt wiele, ot, jedna jest duża, druga mała, ale obydwie to liczby jak liczby. Mamy ciągle pewne skojarzenia odnośnie liczb takich jak 7, 13 czy 666, wynikające z historii czy błędnych tłumaczeń religijnych tekstów, jednak daleko jest nam do pitagorejczyków, dla których 1 symbolizowało początek świata, 2, 3 pierwiastki męskie i żeńskie, 4 liczbę żywiołów, a $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ była już w ogóle Nirvaną. Dodatkowo, dziś „matematyk” raczej nie kojarzy nam się z „idolem” czy choćby „celebrytą”. A taki Archimedes, ze względu na swą wiedzę matematyczną, był nieledwie półbogiem w oczach swoich pobratymców. Miał choćby niepodważalny wkład w obronę Syrakuz, kiedy to wykorzystywał swą wiedzę do konstruowania machin oblężniczych, a nawet, według niektórych podań, spalał rzymiańskie statki za pomocą olbrzymich luster.

Oczywiście, nie można myśleć, że Grecy zamiast matematykę tworzyć, to tylko jej bili pokłony. Rozwój geometrii, który dokonał się między innymi dzięki Euklidesowi, dziś pozwala nam podziwiać realistyczne refleksy światła na komputerowo generowanych krajobrazach. Tak, tak – w pewien sposób dzięki temu, że ktoś kiedyś stwierdził, że 10 jest fest ładne, my straciliśmy dwie godziny naszego życia w trójwymiarowym kinie, oglądając „Avatara”. Iście efekt motyla. A tak poważnie – dzięki trygonometrii już starożytni byli w stanie oszacować (całkiem nieźle) takie wielkości, jak obwód czy promień Ziemi. Szczerze mówiąc, dzisiaj, przy całym ogromie wiedzy jaką mamy,



jak wielu z nas wiedziałoby, jak się do takiego zadania zabrać (powiedzmy, nie używając Internetu i komputerów)? Zapewne rozpisując sobie różne dziwne rzeczy, doszlibyśmy – może – w końcu do jakiegoś równania z niewiadomą x...

....i to nas prowadzi do kolejnego zagadnienia – kto i kiedy wpadł na pomysł, żeby zapisywać równania? Żeby pisać niewiadome jako litery? Tak jak już wspomniałem, potrzebne były wieki, by w miarę wyklarował się sposób zapisu znanych liczb – a tu nagle trzeba wymyślić zapis dla liczb nieznanych. O ile trudniejsza byłaby matematyka, gdybyśmy, zamiast uczyć się wzoru na pole trapezu

$$P = \frac{1}{2}(a+b)h$$

musieli za każdym razem zapamiętywać, że „Pole figury tej równe jest połowie sumy podstaw jej ich przez jejże wysokość pomnożoną”[4]. Nie wspominając o fakcie, że wówczas praktycznie niemożliwe byłoby sformułowanie ogólnych algorytmów rozwiązywania zadań – nie można by tego zapisać wzorem czy nawet regułą, tylko za każdym razem, mając konkretne dane, trzeba by „wziąć tę daną, przemnożyć przez tę, dodać pięć, odjąć to, wyciągnąć pierwiastek, zrobić tamto” – praktycznie niemożliwe do zapamiętania i zdecydowanie mało poręczne. No a już zupełną oczywistością jest, że gdyby nie literki, niemożliwością byłoby choćby deklarowanie zmiennych w programach komputerowych (zakładając, że w ogóle jakimś cudem powstałoby coś takiego jak komputer) – zatem de facto świat jaki znamy dziś by nie istniał. Matematyka rozwiązywania równań i operacji na literkach to „algebra”, słowo pochodzące od arabskiego „al-dżabar”, które to dziwne słowa pojawiły się w arabskim dziele z roku około 820. Było to zdecydowanie jedno z pierwszych dzieł, w którym pojawiło się coś w rodzaju dzisiejszego rachunku na niewiadomych – i stąd można je uznać za fundament dzisiejszej algebry.

Istotnym zastosowaniem matematyki zawsze było przyspieszanie wykonywania wszelkiego rodzaju obliczeń. Nawet przed wymyśleniem komputerów ludzie mieli świadomość, że nie można wszystkich obliczeń robić byle jakimi metodami, bo po prostu nie ma na to czasu. Szybko też doszli do wniosku, że dodawać jest łatwiej niż mnożyć i rozpoczęli poszukiwania metod pozwalających zmieniać iloczyny w sumy. Poszukiwania te zwieńczyło pojęcie logarytmu; zaskakującym jest jednak, że pierwsze kroki w tym kierunku wzięto z... trygonometrii. Istotnie, pierwsze operacje zmieniające iloczyny w sumy (znane pod niezgrabną nazwą *prosthaphaeresis*) wychodziły od wzoru

$$\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sin x + \sin y}{2}.$$

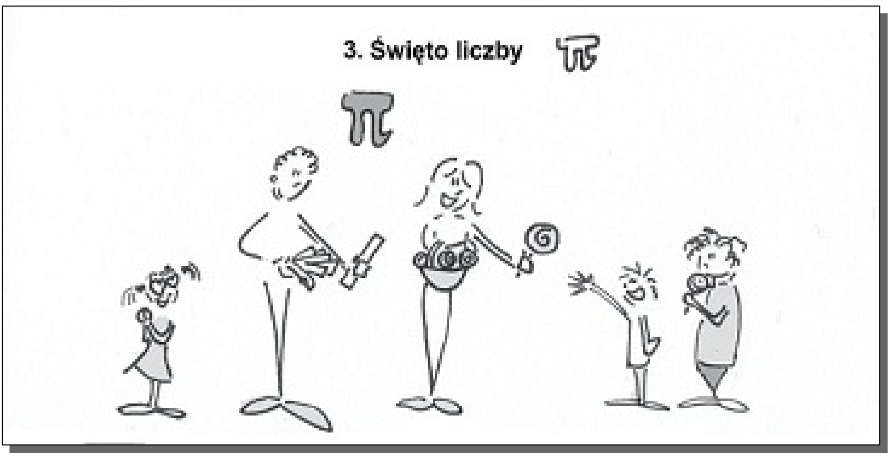
Logarytmy w mniej więcej takiej postaci jak dzisiaj pojawiły się około roku 1594 za sprawą prac Johna Napiera. Nie będziemy może dokładnie śledzić tu

[4]Tak, wiem, nie potrafię naśladować bardziej „starożytnego” języka.

ścieżek jakimi płynęły jego rozumowania – zauważmy jednak, jak nieoczekiwanie coś tak geometrycznego jak trygonometria powiązało się z czysto liczbowymi rozważaniami. W jaki sposób nauka o trójkątach mogła powiększyć ludzką wiedzę o dodawaniu? Co ma jedno do drugiego?

Od prac Kartezjusza na temat układów współrzędnych rozpoczął się długi proces odpowiedzi na powyższe pytanie, zakończony wnioskiem, że tak naprawdę trygonometria i działania na liczbach, lub nieco ogólniej – geometria i algebra mogą być używane praktycznie rzecz biorąc zamiennie. To, co dzisiaj nazywamy „geometrią analityczną" jest zmorą uczniów w liceach, bo jak można robić zadania z geometrii za pomocą samych wzorków, nie robiąc po drodze ani jednego rysunku?! Zyski płynące z takiego podejścia były jednak niebagatelne, pozwalając na konstrukcję precyzyjniejszych instrumentów nawigacyjnych, czy – w dzisiejszych czasach – na rozwój grafiki komputerowej.

Jak zatem widać, każda dziedzina matematyki kiedyś gdzieś zaczęła przewijać się w życiu i czasami rozgraniczenie „matematyki teoretycznej" i „zastosowań" było bardzo niejasne. Wydawało się, że ta sytuacja uległa zmianie wraz z rozwojem teorii liczb, dziedziny matematyki, o której sam Gauss mawiał, że jest absolutnie czysta i oderwana od świata rzeczywistego (mówił o tym jako o zalecie). I jakkolwiek jest to piękna dziedzina sama w sobie, to biedny Gauss nie miał prawa wiedzieć, że kilkaset lat później pojęcia działań modulo staną się nieodzowne w szyfrowaniu informacji na szeroką skalę. Dzisiaj jedynymi dwoma strażnikami naszej prywatności w Internecie, naszych pieniędzy w bankach i wielu, wielu innych rzeczy są teoria liczb właśnie oraz problem „P vs NP", o którym jednak nie będziemy tu się wiele rozpisywać – dość powiedzieć, że gdyby któryś z tych strażników zawiódł, to mielibyśmy spory problem.



Mamy już zatem przykład tego, jak głęboko abstrakcyjna dziedzina matematyki może nagle stać się dziedziną matematyki stosowanej. A w drugą stronę? Praktycznie rzecz biorąc cała matematyka wyszła od zastosowań, jednak bardzo jaskrawym przykładem tego, jak chęć opisania świata może doprowadzić do stworzenia bogatego aparatu teoretycznej matematyki jest historia powstania rachunku różniczkowego.

O różniczkach większość ludzi wie tyle, że są to wyniczki odejmowanka. Istotą idei różniczek jest następujące zagadnienie – badamy jakieś zjawisko fizyczne i interesuje nas, jak szybko dana wielkość zmienia się w dokładnie tym momencie, w jakim patrzymy. Nie jak szybko zmienia się średnio w przeciągu pięciu sekund, nic z tych rzeczy – interesuje nas, jaka jest prędkość zmiany *dokładnie teraz*. Ale co to jest „dokładnie teraz"? Obecna sekunda? Obecna mikrosekunda? Mniej? Więcej? Jak to zmierzyć? Co z tym zrobić? W życiu nie ma czegoś takiego jak „dokładnie teraz". To, że czasu nie da się podzielić na kawałki „dokładnych terazów" wykazał już Zenon z Elei swym paradoksem strzały. Gdyby bowiem było to możliwe, to wystrzelmy strzałę z łuku i patrzmy na nią w każdym „dokładnie teraz" momencie. W każdym takim momencie strzała pozostaje w bezruchu (bo patrzymy na nią „dokładnie teraz", więc zatrzymujemy czas), a jednocześnie przecież oczywistym jest, że jakąśtam odległość ona przebiega – zatem zmiana jej położenia musiałaby zachodzić gdzieś pomiędzy naszymi kolejnymi momentami „dokładnych terazów".

Na samym początku aż tak nie przejmowano się takimi formalizmami. Zmianę wielkości w danym momencie zdefiniowano tak: obliczmy zmianę w krótkim odstępie czasu, potem w jeszcze krótszym, i jeszcze, i jeszcze, i popatrzmy, do jakiej liczby nam się ta wielkość zbliża – i tę właśnie liczbę „graniczną" nazwijmy zmianą naszej wielkości w danym momencie. Na przykład, jeśli zmiany wielkości wyglądałyby tak: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ to każdy uwierzy, że te liczby w jakimśtam sensie „zbiegają" do zera – i logicznym byłoby przyjąć zero jako wartość graniczną. Ale na ścisłą matematyczną definicję granicy musieliśmy jeszcze długo poczekać – rachunek różniczkowy zapoczątkowali Newton i Leibniz przed rokiem 1700, a ścisłe definiowanie takich rzeczy jak granica właśnie czy ciągłość funkcji zawdzięczamy Cauchy'emu i Bolzano po roku 1800. Do tego czasu w matematyce pojawiały się potworki pokroju liczb „nieskończenie małych", które, jakkolwiek niegroźne na początku, z każdym kolejnym odkryciem w tej dziedzinie coraz bardziej pokazywały, że trzeba by się nimi kiedyś zająć. Główną motywację do tego dał Fourier, który wykazał, że wiele funkcji da się aproksymować za pomocą tak zwanych szeregów Fouriera – co, po głębszym przemyśleniu, było bardzo dziwne, bowiem funkcje wchodzące w skład szeregów Fouriera były ciągłe (tzn. ich wykresy były „w jednym kawałku"), a dało się za ich pomocą przybliżać funkcje nieciągłe (których wykresy były w kilku rozłącznych kawałkach).

Od roku 1700 zatem w matematyce pojawiły się dwie bardzo, bardzo ważne idee. Po pierwsze, bogactwo zastosowań rachunku różniczkowego pokazało, że jeśli chcemy opisywać matematycznie świat, wielkości fizyczne mają mniejsze znaczenie niż tempo ich zmian. Dopiero wraz z rozwojem tej dziedziny można było na poważnie zabrać się za „modelowanie” zjawisk ze świata rzeczywistego, dzięki czemu obliczono takie rzeczy, jak na przykład jaki kształt powinien mieć most, by się nie zapaść. Dzisiaj równania różniczkowe pozwalają łączyć matematykę z fizyką czy biologią, dając nam nowe narzędzia do walki z problemami pojawiającymi się w każdej z tych dziedzin. Dość powiedzieć, że znane są już sytuacje, kiedy wyniki z tych dwóch nauk niemożliwe do zweryfikowania eksperymentalnie były weryfikowane na gruncie czystej matematyki.

Drugą ważną ideą było spostrzeżenie, że matematykę trzeba zacząć formalizować. Że podejście „naiwne”, biorące pewne rzeczy na wiarę, przyjmujące inne za oczywiste jest w stanie zaprowadzić nas tylko do pewnego punktu, poza którym natrafimy na blokadę niemożliwą do pokonania, póki nie pozbędziemy się tej wrodzonej naiwności. Poza tym, w matematyce powoli zaczęły się pojawiać różnego rodzaju kontrprzykłady, pokazujące, że nasza intuicja dotycząca różnych zjawisk matematycznych jest bardzo, bardzo wadliwa – a każdy osobnik znający się choć trochę na logice wiedział, że jeśli okaże się, że matematyka od której wychodzimy jest fałszywa, to również wszystkie wyniki jakie za jej pomocą uzyskamy są fałszywe.

Poza analizą matematyczną, czyli dziedziną matematyki w której skład wchodzą właśnie takie rzeczy jak rachunek różniczkowy czy granice, również w geometrii dostrzeżono, że to, co dla nas jest „oczywiste” niekoniecznie jest prawdziwe. Jak już wspomnieliśmy, w znakomitej części rozwój geometrii zawdzięczamy Euklidesowi, który położył fundamenty pod tę dziedzinę matematyki. Między innymi podał on zbiór praw, które – jego zdaniem –

powinny w geometrii zachodzić, jak na przykład „wszystkie kąty proste są równe". Jedno prawo jednak było nieco bardziej skomplikowane, i brzmiało ono że dla każdej prostej i punktu istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do danej przechodząca przez ów punkt. Próby wykazania, że w jakiś sposób wynika ono z pozostałych, spełzły na niczym i powoli, powoli do umysłów matematyków zaczęło wkradać się podejrzenie, że może to prawo nie jest konieczne, by geometria „działała". Dość powiedzieć, że rozważania te doprowadziły nas do powstania geometrii nieeuklidesowych, które pozwalają odpowiadać na takie pytania, jak „jaki kształt ma Wszechświat" oraz uprawiać geometrię na innych tworach niż płaszczyzny. Co w oczywisty sposób jest istotne, bo Ziemia jest okrągła, a nie płaska.

Historia tego, jak dalej rozwijała się matematyka, jest niezwykle wielowątkowa. Uogólnienia geometrii pokazywały, że ograniczanie się do trzech wymiarów nie ma sensu – dzisiaj nawet w niektórych programach komputerowych świat postrzega się „czterowymiarowo", bo upraszcza to obliczenia, a teoria strun w fizyce wysuwa kolejne hipotezy, że nasze uniwersum może mieć wymiarów kilkanaście. Idąc w innym kierunku, pojawiła się topologia, czyli tak zwana „geometria gumy do żucia", w której kubek do kawy i pączek z dziurką są jednym i tym samym... i coś tak dziwnego znalazło zastosowanie w genetyce molekularnej. Rachunki na niewiadomych popchnęły nas do teorii grup i abstrakcyjnej algebry, które dziś informują nas, jakie wzory jesteśmy w stanie zaobserwować na ciałach zwierząt oraz pozwalają nam coraz lepiej kompresować pliki na płytach DVD. Pozostawiliśmy niezbadane całe dziedziny matematyki, jak teoria chaosu czy rachunek prawdopodobieństwa, na których stoją dziś całe giełdy papierów wartościowych i które również przewijają się co i rusz w biologii. Jednocześnie prace Kurta Goedla i Alana Turinga pokazały, że matematyka i komputery nigdy nie dostarczą odpowiedzi na *wszystkie* pytania. I jednym z pytań, na które nigdy nie poznamy odpowiedzi jest, czy matematyka jest sprzeczna. Ale niezależnie od tego należy wiedzieć i pamiętać, że rozwinęła ona naszą cywilizację w ogromnym stopniu i dalej jest obecna w każdym aspekcie naszego życia, niezależnie od tego, że jest to obecność subtelna i nieoczywista na pierwszy rzut oka.

Opowiadanie jednak każdego z tych wątków w szczegółach zajęłoby bez wątpienia całą resztę tego numeru [Macierzatora]. A przecież na Święcie π jest całe mnóstwo innych atrakcji do zobaczenia, innych niż czytanie jednego, przydługiego artykułu w gazetce! Zamiast tego proponuję więc wszystkim, których mój artykuł zainteresował, przeczytanie książki Iana Stewarta wymienionej w podtytule niniejszego artykułu. Tam wszystkie te informacje są przedstawione wolniej, w głębszych szczegółach i z większym autorytetem. Bo niezależnie od tego, jak wielkie mądrości ja tu napiszę, nie możecie zapomnieć że autorem tego artykułu jest przecież tylko –

Niewinny Rosomak

[O pewnym ciekawym szeregu]

Tak się czasami w matematyce zdarza, że nawet bardzo proste rzeczy mogą okazać się troszkę zaskakujące. Przyjrzyjmy się dwóm szeregom:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \text{ oraz } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}.$$

Pierwszy z nich, to szereg geometryczny o sumie 1. Drugi szereg, na mocy kryterium d'Alemberta, również jest zbieżny.

Można postawić naturalne pytanie: która suma jest większa? Oczywiście mamy, że $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{n}{2^{n+1}}$ $(n > 1)$, więc na pierwszy rzut oka wydawałby się, że pierwsza suma jest mniejsza.

Okazuje się jednak, że... obie są równe 1. Mamy bowiem:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} + \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1
\end{aligned}$$

Co się stanie, gdy w powyższych szeregach zamiast 2 napiszemy 3, tzn. będziemy rozważać szeregi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \text{ oraz } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}}?$$

Podobnie jak wcześniej można uzasadnić, że obie sumy istnieją oraz wynoszą odpowiednio $\frac{3}{2}$ oraz $\frac{3}{4}$, więc po raz kolejny nasza intuicja zawiodła (i to jakby trochę bardziej).

Skąd wiadomo, że suma drugiego szeregu wynosi $\frac{3}{4}$? Otóż można pokazać, że *Jeżeli* $|k| > 1$ *to* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{k^n} = \frac{k}{(k-1)^2}$. Chyba najbardziej elementarnie można to udowodnić następująco. Oczywiście powyższy szereg jest zbieżny, na mocy kryterium d'Alemberta. Zauważmy, że

$$k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{k^n} = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k^n} = k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{k^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{k^n} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n}}_{=\frac{k}{k-1}},$$

zatem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{k^n} = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{k}{(k-1)^2}.$$

Gdzie czai się małe oszustwo? Otóż sumowanie w powyższych szeregach zaczynamy od 0, a nierówności między wyrazami ciągów mamy dopiero dla $n \geqslant 1$. Tak to jest w tej naszej matematyce, że nawet najmniejsze szczegóły są bardzo istotne.

vil

[Podoba Ci się Święto π?]

Zapraszamy na nasze wykłady przez cały rok!

Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego (KNM UŚ) tworzy (z każdym rokiem większa) grupa studentów, którzy lubią zajmować się matematyką – rozmawiać o niej, opowiadać, popularyzować, czytać... Organizujemy spotkania, sesje wyjazdowe, konferencje, obozy naukowe, jeździmy na spotkania matematyczne w kraju i za granicą, wydajemy własny miesięcznik matematyczny [Macierzator], którego specjalne wydanie właśnie trzymasz w ręku, oraz bardzo aktywnie działamy w sferze popularyzacji matematyki wyższej wśród licealistów. Chcemy pokazać, że matematyka nie ma za wiele wspólnego z (nudnym i żmudnym) liczeniem – opowiadamy o matematyce nowoczesnej, pełnej fascynujących zastosowań, ciekawej. To właśnie członkowie KNM organizują co roku matematyczną część Święta Liczby π, a w jej ramach wykłady, warsztaty, konkursy... Od ponad dekady prowadzimy też piątkowe spotkania z młodzieżą szkół średnich i nie tylko, podczas których członkowie KNM starają się w elementarny sposób przybliżyć interesujące zagadnienia matematyczne, z różnych powodów niemieszczące się w coraz bardziej okrajanym programie szkolnym.

Spotkania referatowe odbywają się w piątki, w czasie trwania roku akademickiego, w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, przy ulicy Bankowej 14 w Katowicach, w sali 213 (Auli Kopernika). Wszystkie zajęcia są oczywiście bezpłatne oraz otwarte dla wszystkich chętnych. Nie trzeba się też na nie zapisywać. Dla osób, które z różnych przyczyn nie mogą uczestniczyć w spotkaniach, nagrywamy nasze wykłady; są one dostępne bez żadnych ograniczeń na naszej oficjalnej stronie internetowej: `www.knm.katowice.pl`. Zachęcamy do zajrzenia na tę stronę – można na niej znaleźć dziesiątki skryptów, setki godzin wykładów czy ponad piętnaście tysięcy (!) zdjęć, a także wszystkie archiwalne numery [Macierzatora].

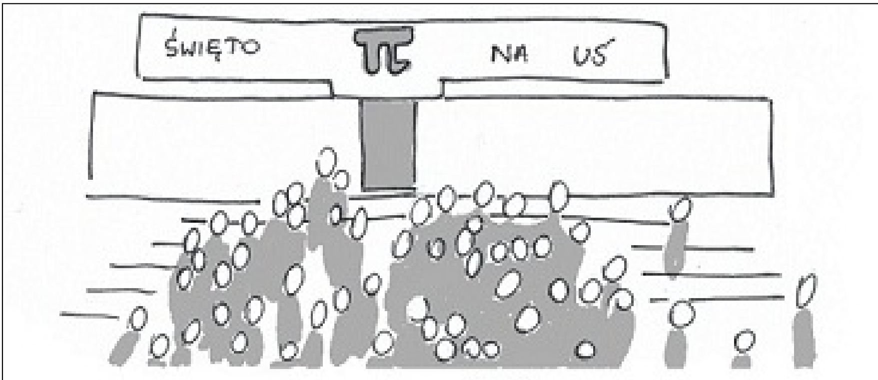
Jeśli jednak masz jakieś wątpliwości, sugestie, uwagi, lub po prostu chcesz o coś spytać – napisz do nas! Adres mailowy to `knm@knm.katowice.pl`. Na maile odpowiada autorka tego tekstu, przewodnicząca Koła Naukowego Matematyków UŚ oraz redaktor naczelna [Macierzatora] –

Joanna Zwierzyńska

[Algorytm Gaussa-Legendre'a]

17 października ubiegłego roku Shigeru Kondo, japoński inżynier, i Alexander J. Yee, amerykański student chińskiego pochodzenia, ogłosili światu, że po 371 dniach pracy udało im się pobić rekord świata (należący do... Shigeru Kondo i Alexandra J. Yee) i wyznaczyć ponad 10 bilionów cyfr liczby π. Uzyskany przez nich wynik niewątpliwie mógłby zawstydzić Ludolpha van Ceulena, który z wyznaczonych przez siebie 35 cyfr π był tak dumny, że kazał wyryć je na swoim nagrobku.

Jak widać, problem aproksymacji π nie przestaje nurtować matematyków. Z pewną jego odsłoną zmierzyli się również uczestnicy ubiegłorocznej



5. Święto liczby PI π

odsłony międzynarodowego intensywnego kursu matematycznego *Analytical and Computer Assisted Methods in Mathematical Models*. Jednym z projektów, które wspólnie przygotowywali studenci, było napisanie programu podającego przybliżenie liczby π. W artykule przedstawię algorytm Gaussa-Legendre'a, na którym bazował program napisany przez mój zespół.

Algorytm Gaussa-Legendre'a został niezależnie opracowany w 1975 roku przez Richarda P. Brenta, australijskiego profesora matematyki i informatyki, oraz Eugene'a Salamina, amerykańskiego matematyka, stąd bywa czasem nazywany również algorytmem Brenta-Salamina. Nazwiska Gaussa i Legendre'a nie pojawiły się jednak w nazwie algorytmu przypadkowo – to wyniki uzyskane przez tych matematyków stały się jego podstawą.

Rozpoczniemy od zdefiniowania średniej arytmetyczno-geometrycznej. Dla dowolnych rzeczywistych liczb dodatnich a i b wprowadzamy następujące ciągi:

$$a_0 = a, \qquad b_0 = b$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Ciągi $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ są nazywane iteracjami Gaussa dla średniej arytmetycznej i geometrycznej. Zmierzają do wspólnej granicy, nazywanej średnią arytmetyczno-geometryczną a i b i oznaczanej $AGM(a,b)$ (skrót pochodzi od angielskiej nazwy *arithmetic-geometric mean*).

Analizując długość łuku lemniskaty Bernoulliego Gauss zauważył, że wartości wyrażeń

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} \text{ i } \frac{1}{AGM(1,\sqrt{2})}$$

są sobie odpowiednio bliskie (równość występowała dla oszacowanych przez niego jedenastu cyfr po przecinku). Ta obserwacja zapoczątkowała badania Gaussa nad postacią średniej arytmetyczno-geometrycznej, w wyniku których uzyskał następującą równość:

$$AGM(a,b) = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}\right)^{-1}$$

Przyjmijmy teraz następujące oznaczenia: całkę eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju oznaczmy jako $K(\varphi)$, rodzaju drugiego – jako $E(\varphi)$ dla $\varphi \in (0,1)$. Przypomnijmy, że:

$$K(\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2\varphi\sin^2 t}}, \; E(\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\varphi\sin^2 t}\mathrm{d}t$$

Zauważmy, że w przypadku, gdy $a = 1$, $b = \cos\varphi$ dla pewnego φ, średnia arytmetyczno-geometryczna liczb a i b wynosi (po prostych przekształceniach):

$$AGM(1, \cos\varphi) = \frac{2}{\pi} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t + \cos^2\varphi \sin^2 t}} \right)^{-1} = \frac{2}{\pi \cdot K(\varphi)} \qquad (1)$$

Jak widać, stopniowo krystalizuje się sposób, w jaki algorytm wykorzystuje średnią Gaussa. Aby jednak móc skorzystać z powyższej tożsamości w celu oszacowania wartości π, musimy znać (dla pewnych φ!) wartość całki $K(\varphi)$. W tym celu określmy najpierw rekurencyjnie ciąg $c_0 = \sin\varphi$, $c_{k+1} = a_k - a_{k+1}$ dla $a_0 = 1$ i $b_0 = \cos\varphi$. Wówczas zachodzi następująca równość:

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{k-1} c_k^2 = 1 - \frac{E(\varphi)}{K(\varphi)} \qquad (2)$$

Jak widać, mając do dyspozycji łatwe do wyliczenia iteracje, możemy aproksymować iloraz całek $E(\varphi)$ i $K(\varphi)$. Ostatnim krokiem na drodze do wyznaczenia wartości π jest zatem podanie odpowiedniej relacji pomiędzy tymi całkami. Dla φ i ψ takich, że $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$ zachodzi następująca równość, nazywana tożsamością Legendre'a:

$$K(\varphi)E(\psi) + K(\psi)E(\varphi) - K(\varphi)K(\psi) = \frac{\pi}{2}$$

Weźmy zatem $\varphi = \psi = \frac{\pi}{4}$. Dzieląc powyższą tożsamość stronami przez π^2 otrzymujemy:

$$2\frac{K(\frac{\pi}{4})}{\pi} \cdot \frac{E(\frac{\pi}{4})}{\pi} - \left(\frac{K(\frac{\pi}{4})}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}$$

Przekształcając odpowiednio powyższą równość i podstawiając uzyskaną wartość do (1) i (2), otrzymujemy następującą postać π:

$$\pi = \frac{AGM(1, \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{\frac{1}{2} - \sum_{i=0}^{\infty} 2^{k-1} c_k^2}$$

6. Święto liczby π

Estymacja π przy pomocy ostatniego wyniku nie sprawia już żadnych problemów i sprowadza się wyłącznie do obliczania kolejnych iteracji przybliżających średnią arytmetyczno-geometryczną i sum częściowych szeregu w mianowniku. Poniżej prezentuję wartości początkowe oraz kolejne kroki algorytmu, które powtarzamy aż do otrzymania żądanej przez nas dokładności.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, & a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} \\
b_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n}, \\
t_0 &= \frac{1}{4}, & t_{n+1} &= t_n - x_n(a_n - a_{n+1})^2 \\
x_0 &= 1, & x_{n+1} &= 2x_n
\end{aligned}$$

Przybliżoną wartość liczby π otrzymujemy wykonując po n powtórzeniach następujące działanie:

$$\pi \approx \frac{\left(\frac{(a_n)+(b_n)}{2}\right)^2}{t_n}$$

Główną cechą wyróżniającą algorytm Brenta-Salamina na tle innych jest tempo jego zbieżności – zaledwie 25 jego iteracji pozwala na uzyskanie przeszło 45 milionów cyfr. Dokładność algorytmu uzyskaną w poszczególnej liczbie kroków nietrudno zresztą wyliczyć samemu, ponieważ charakteryzuje się on zbieżnością drugiego rzędu (a zatem w każdej iteracji podwaja liczbę wyliczonych przez siebie poprawnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π).

We wrześniu 1999 roku dzięki algorytmowi wyznaczono 206 158 430 000 cyfr liczby π. Ich wyliczenie zajęło komputerowi 37 godzin, 21 minut i 4 sekund; następnie poprawność pracy algorytmu przez dwie doby sprawdzana była algorytmem Borweina. Wynik ten pobił wówczas rekord świata w zakresie estymacji π. Liczba znanych cyfr rozwinięcia dziesiętnego π – jak wspominałam na początku artykułu – została od tego czasu blisko pięćdziesięciokrotnie powiększona i zapewne będzie powiększana dalej.

[Literatura]

[1] R.Brent, *Multiple-precision zero-finding methods and the complexity of elementary function evaluation*, Academic Press, New York, 1975

[2] E.Salamin, *Computation of Pi Using Arithmetic-Geometric Mean*, Mathematics of Computation, 1976 Sz. Baják, Gauss-Composition and invariance equation for two-variable means, International Symposium on Functional Equations, 2011

[3] S.Kondo, A.Yee, `http://www.numberworld.org/misc_runs/pi-10t/details.html`, 201

Magdalena Nowak

[VI ŚWIĘTO LICZBY π — 15 marca 2012 r.]

w Instytucie Matematyki UŚ

HARMONOGRAM

9:00 – 15:00	Warsztaty KNM UŚ
9:00 – 12:00	Konkurs *Tour de Science* – Marek Biedrzycki, mgr Weronika Siwek
9:00 – 9:45	*Czy matematyka jest kolorowa?* – Szymon Draga
10:00 – 11:00	*Projekt matematyczny* – dr Tomasz Kochanek
11:00 – 12:00	Konkurs *π-krzyżówka* (s. 231) – Beata Łojan
11:15 – 12:00	*Jak matematyka radzi sobie z problemami* – Piotr Idzik
12:00 – 14:00	Finał konkursu $e\pi$graMAT (s. 535) – dr Tomasz Bielaczyc
12:15 – 13:00	*Przestrzenie polskie* – Joanna Zwierzyńska
14:15 – 16:00	**KINOTEATR RIALTO w Katowicach**: Rozdanie nagród oraz koncert *Śpiewających Szynszyli*

WARSZTATY KNM

sala 215:	**Pracownia komputerowa** – warsztaty cykliczne: 9:30, 12:30; Piotr Idzik
sala 216:	**Szyfrowanie klasyczne** – warsztaty cykliczne: 12:00; Marek Biedrzycki, mgr Weronika Siwek
sala 225:	**Fraktale** – warsztaty cykliczne: 9:00, 10:30, 12:00; Adrianna Świeczak, Mateusz Szymański, Paweł Bialas
sala 233:	**π-lionerzy** – konkurs: 9:00 – 11:00, 12:00 – 14:00; Konrad Jałowiecki, mgr Radosław Łukasik
sala 429:	**Świat wielościanów** – warsztaty cykliczne: 10:00, 13:00; Beata Łojan
sala 429:	**Algorytmy** – warsztaty cykliczne: 9:00, 12:00; Sabina Wrońska
sala 221:	**Zagadki logiczne** – warsztaty o charakterze ciągłym: 9:00 – 15:00; Anna Jacek, Marcin Jenczmyk, Barbara Małek
sala 224:	**Kawiarnia Szkocka** – warsztaty o charakterze ciągłym: 9:00 – 15:00; mgr Wojciech Bielas, Magdalena Nowak, Magdalena Sitko
sala 226:	**Kasyno** – warsztaty o charakterze ciągłym: 9:00 – 15:00; Mikołaj Stańczyk, Justyna Świątkowska

Uwaga: ilość imprez może się zwiększyć – najbardziej aktualne doniesienia znajdują się na stronie internetowej Święta Liczby π
`www.swietopi.pl`.

Wszystkie zajęcia organizowane przez Koło Naukowe Matematyków UŚ są całkowicie bezpłatne i nie obowiązują na nie zapisy!!! Zachęcamy również do odwiedzenia naszej strony internetowej: `www.knm.katowice.pl` oraz naszego profilu na facebooku: `http://www.facebook.com/knm.katowice`

[Ludolfina, czyli 3,1415926...]

Ludolfina, czyli π to liczba, wyrażająca stosunek długości okręgu koła do długości jego średnicy. Nazwa „ludolfina" pochodzi od imienia holenderskiego matematyka Ludolfa van Ceulena, który w 1610 roku obliczył wartość liczby π z dokładnością do 35 cyfr po przecinku. Symbol π został po raz pierwszy użyty w 1706 roku przez Wiliama Jonesa.

No dobrze, a skąd się w zasadzie wzięła liczba π? Historia liczby π sięga już starożytności – Babilończycy zauważyli, że stosunek obwodu koła do jego średnicy jest wartością stałą i przyjęli $\pi \approx 3$. Jednym z pierwszych matematyków dokładniej badających własności liczby π, był Archimedes, który szacował π z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku oraz wyznaczył przedział w jakim mieści się liczba π, $\pi \in \left(3\frac{10}{71}; 3\frac{1}{7}\right)$. Metodą Archimedesa (dla wieloboków o 3072 bokach) w III w.n.e chiński matematyk Liu Hui wyznaczył przybliżoną wartość π na $3,1415$. Jak łatwo się domyslić obliczenia te były bardzo żmudne czasochłonne i nie należały do najprzyjemniejszych. Małymi krokami wyznaczano kolejne przybliżenia π. Jest ona bardzo bliska $\frac{22}{7} \approx 3,14$; jeszcze bliżej jej do $\frac{355}{113} \approx 3,1415929203...$, jednak w obu przypadkach nie mamy równości. Matematycy zadawali sobie pytanie, czy możliwe jest zapisanie liczby π jako ułamka. Negatywnej odpowiedzi na to pytanie udzielił w 1761 roku Johann Lambert. Przełomową datą był rok 1882, w którym Ferdinand Lindemann udowodnił, że π jest również liczbą przestępną (tzn. nie istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych, którego π jest pierwiastkiem.).

Magia liczby π trwa nadal; fascynuje ona nie tylko matematyków, ale również humanistów, którzy piszą wiersze na jej cześć. Obchodzony jest również Dzień Liczby π, którego pomysłodawcą był Larry Shaw. Pierwszy raz obchodzony był 14 marca 1988 w muzeum naukowym „Exploratorium" w San Francisco, a świętowanie Dnia Liczby π w tym muzeum polega na chodzeniu w kółko i zjadaniu okrągłych ciasteczek. Apogeum święta wypada 14 marca o godzinie 1:59:26, czyli stosując amerykański zapis daty, w którym najpierw zapisujemy miesiąc a później dzień: 3-14 1:59:26.

Beata Łojan

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Piotr Idzik, Mateusz Jurczyński, Beata Łojan, Magdalena Nowak, Joanna Zwierzyńska,
Autorka komiksu: Anna Jacek
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan
Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:
`macierzator@knm.katowice.pl`.
marzec 2012