[MACIERZATOR48]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

Witamy w czerwcowym numerze [MACIERZATORa]!

To już ostatni numer [Macierzatora] przed wakacjami. Można w nim znaleźć kolejną część *Kącika TEXowego* (tym razem opowiemy o pakiecie `tikz` służącym do tworzenia grafik wektorowych w formacie PGF (Portable Graphics Format)), artykuł o tym, czy publikacje naukowe muszą być tworzone tylko na poważne tematy oraz rozważania o trochę innych pochodnych – produktowych. Życząc wszystkim Czytelnikom udanych, pełnych wrażeń, ale i odpoczynku wakacji, zachęcamy jednocześnie studentów do zapoznania się z możliwością uczestniczenia w dwutygodniowym, sfinansowanym przez Unię Europejską matematycznym kursie intensywnym, który odbędzie się we wrześniu w Freudenstadt w ramach programu ACAMiMM, w którym uczestniczy nasza uczelnia. Warto rozważyć tę propozycję.

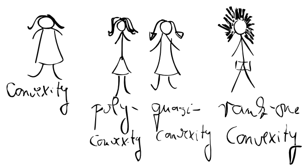
Dobrych wakacji życzy redakcja

ISSN 2083-9774

[ACAMiMM 2012
Wakacyjny intensywny kurs matematyczny]

We wrześnie ubiegłego roku dziewięcioro członków Koła Naukowego Matematyków UŚ brało udział w wakacyjnym intensywnym kursie matematycznym – Analytical and Computer Assisted Methods in Mathematicals Models. Przez dwa tygodnie nie tylko uczyliśmy się intensywnie matematyki, ale też nawiązaliśmy wiele nowych znajomości ze studentami i wykładowcami z kilku europejskich uczelni, zwiedzaliśmy, poznawaliśmy kulturę i obyczaje osób innych narodowości, stworzyliśmy świetną, zgraną, wielokulturową grupę. To tam właśnie poznaliśmy Profesora Wolfganga Reichela, który gościł u nas przez tydzień w maju. Projekt ACAMiMM jest trzyletni; niestety dla nas, ubiegłorocznych uczestników – każdy student może w nim uczestniczyć tylko raz.

W tym roku kurs intensywny odbywa się w Niemczech, w Schwarzwaldzie, w mieście o nazwie Freudenstadt, od 9 do 23 września 2012. Jego uczestnicy zapoznają się z wiadomościami z czterech dziedzin: rachunku wariacyjnego (z zastosowaniami w elastyczności i optymalizacji), równań i nierówności funkcyjnych, uogólnionej wypukłości oraz kryształów fotonicznych. Wykładowcami są wybitni specjaliści z tych dziedzin, profesorowie z kilku krajów europejskich. Kurs kończy się egzaminem, ale nie ma się co go obawiać – w ubiegłym roku wszyscy uczestnicy z naszej uczelni zdali go z najwyższą możliwą notą. Dodatkowo studenci wykazują się praktycznym zastosowaniem zdobytych umiejętności przez przygotowanie w grupach projektu na wybrany temat. Wszystkie osoby, które otrzymają pozytywny wynik z egzaminu, otrzymują honorowany przez UŚ certyfikat, że zaliczyły przedmiot warty aż 6 punktów ECTS.



Czy warto pojechać na taki kurs? Z pewnością warto. Nie tylko ze względów matematycznych (choć nauczyć się można sporo i zdobyć w dwa tygodnie sześć punktów ECTS): to wspaniałe doświadczenie, możliwość przetestowania swojego angielskiego w praktyce, okazja do poznania wielu fantastycznych osób... Długo by wymieniać. Co ważne, kurs jest dofinansowany przez Unię Europejską – według ostatnich informacji, studenci mają mieć pokryty koszt noclegów, dojazdów oraz przynajmniej części wyżywienia (najaktualniejsze informacje na temat można znaleźć na stronie Koła. Tam też umieściliśmy ponad tysiąc zdjęć z kursu ubiegłorocznego – można się przekonać na własne oczy, że atmosfera podczas wyjazdu była wspaniała). W ramach atrakcji pozamatematycznych przewidziane są wieczory z prezentacją kultury, kuchni i muzyki czy weekend w Strasbourgu połączony z wycieczką do Parlamentu Europejskiego.

Gorąco zachęcam do uczestnictwa studentów, także młodszych lat – w kursie brali udział też studenci pierwszego roku (i świetnie sobie radzili). Więcej informacji o kursie można znaleźć na stronie Koła Naukowego Matematyków (`www.knm.katowice.pl`). Wszelkie pytania można przesyłać na mój adres mailowy (`j.zwierzynska@knm.katowice.pl`); na ten sam adres można od razu przesyłać zgłoszenia. Termin wysyłania zgłoszeń to 8 lipca 2012. Wyniki rekrutacji zostaną ogłoszone niewiele później. Warto!

Kandydaci powinni wysłać na wskazany adres e-mailowy następujące dane:

- imię i nazwisko
- numer i serię dokumentu tożsamości (paszportu/dowodu osobistego);
- datę urodzenia;
- obywatelstwo;
- kierunek i rok studiów;
- średnią ocen*;
- poziom znajomości języka angielskiego**.

* Jako że mamy czerwiec, pojawia się naturalne pytanie - jaką średnią ocen? Przyjmujemy więc, że chodzi o średnią ze wszystkich zaliczonych lat studiów tego stopnia, który realizowało się w tym roku akademickim.

** Powinien on być weryfikowany przez jakiś certyfikat językowy, ale nie wszyscy go mają. Należy więc przesłać informację o posiadanych cetryfikatach dotyczących języka angielskiego i drugą: szacowany przez uczestnika poziom płynności jego języka w chwili obecnej (w skali A2, B1, B2, C1, C2). Uwaga! Sztuczne zawyżenie jego poziomu zdecydowanie nie jest opłacalne!

Joanna Zwierzyńska

[Całki i pochodne produktowe]

Zapewnie wielu studentów bardzo by chciało, by niezbyt prosty wzór na iloczyn pochodnych można było zastąpić poniższą równością:

$$(f \cdot g)' \stackrel{(!)}{=} f' \cdot g'$$

O ileż prostsze stałoby się rachowanie! Możemy pokusić się o zdefiniowanie takiej pochodnej, dla której spełniona jest powyższa równość. Rozważmy pochodną *produktową*, która niesie ze sobą nieco inne informacje niż tradycyjna różniczka:

$$f^*(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

Czasami będziemy używać synonimu: pochodna geometryczna. Definicja wydaje się dosyć naturalna – działanie różnicy przeszło na iloraz a dzielenie na pierwiastek odpowiedniego stopnia. Warto sobie zadać pytanie: jaki jest sens tak zdefiniowanej pochodnej? Poprowadźmy rozumowanie per analogiam: pochodna klasyczna określa tempo przyrostu *addytywnie*, innymi słowy jak wielki jest przyrost funkcji. Natomiast nasza pochodna *multiplikatywna* określa nie różnicę, a iloraz. Jeżeli mamy funkcję f, która dla $x = 2$ przyjmuje wartość $y = 10$, a dla $x = 4$ $y = 40$, to nietrudno wykazać, iż iloraz różnicowy będzie równy $\frac{40-10}{4-2} = 15$. Natomiast nasze nowe wyrażenie mówi nam o tym, że dana funkcja ma tempo geometrycznego przyrostu równe $\sqrt{\frac{40}{10}} = 2$, czyli średnio co jedną jednostkę wartość funkcji się podwaja. W dalszej części będziemy żądać ciągłości funkcji, by uniknąć „patologicznych" przykładów, jak np. funkcji zadanej poniższym wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

dla której powyższa granica istnieje dla wszystkich x i w punkcie nieciągłości jest równa 0, w przeciwnym razie 1. Gdy już to zrobimy, możemy pokazać szczegółowo, kiedy pochodna produktowa w danym punkcie x istnieje i ile wynosi w stosunku do klasycznej pochodnej:

Twierdzenie 1. *Jeżeli $f(x) \neq 0$, to $f^*(x)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $f'(x)$. Zachodzi wtedy (dla klarowności zapisu $e^x = \exp x$):*

$$f^*(x) = \exp\left((\ln|f(x)|)'\right)$$

Dowód. Przypuśćmy, iż funkcja f^* istnieje i jest niezerowa. Zachodzi nawet silniejszy fakt: jeżeli funkcja f^* istnieje, to jest dodatnia (wprost z definicji). Wtedy, na podstawie różniczkowalności funkcji logarytmicznej, można przeprowadzić poniższe równoważne kroki:

$$\begin{aligned}
\ln f^*(x) &= \ln\left(\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{|f(x+h)|}{|f(x)|}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\ln|f(x+h)| - \ln|f(x)|}{h}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&= (\ln|f(x)|)'
\end{aligned}$$

Wtedy, oczywiście $f^*(x) = \exp\left((\ln|f(x)|)'\right)$. Dowód w drugą stronę jest trywialny. □

Jeżeli dalsze pochodne istnieją, to wyrażają się one analogicznie przeprowadzoną zależnością:

$$f^{[n]} = \exp\left((\ln |f(x)|)^{(n)} \right),$$

gdzie $f^{[n]}$ to pochodna produktowa stopnia n, natomiast $f^{(n)}$ jest klasyczną pochodną tego samego stopnia. Głównym „problemem" pochodnej produktowej są osobliwości w miejsach zerowych funkcji do niej pierwotnej – tam pochodne geometryczne są nieokreślone.

O ile pochodna addytywna „traciła" informację o wyrazie wolnym funkcji, tak pochodna multiplikatywna „gubi" współczynniki postaci $cf(x)$. Możemy wywnioskować nawet silniejszą prawidłowość. Jeżeli pochodna w punkcie x istnieje, to zachodzi:

$$\forall_{c\neq 0}\, |cf(x)|^* = f^*(x)$$

Pozostawiam ten fragment do samodzielnego zweryfikowania. Również warto się zastanowić, czy rzeczywiście tak zdefiniowa pochodna jest operatorem multiplikatywnym.

Funkcja stała, jak łatwo przypuszczać, ma pochodną równą elementowi neutralnemu mnożenia – 1 (dotyczy do także funkcji stale równej 0). Jest jeszcze funkcja, która jest stała w procesie różniczkowania geometrycznego. Czyżby e^x? Otóż nie, stałą operacji różniczkowania produktowego jest... e^{e^x}. Możemy sobie to wyliczyć chociażby z definicji. Swoją drogą, każda funkcja wykładnicza, zgodnie z definicją, powinna mieć stałą pochodną geometryczną równą swojej podstawie wykładniczej:

Twierdzenie 2. *Dla każdego $a > 0$ funkcja $f(x) = a^x$ ma swoją pochodną produktową równą $f^*(x) = a$.*

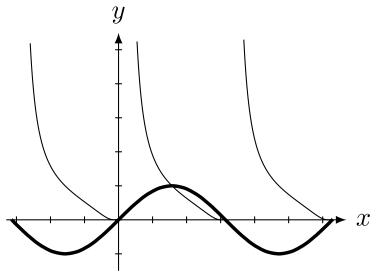
Dowód. Funkcje wykładnicze dodatnie są nieujemne, więc z twierdzenia 1 mamy iż:

$$f^*(x) = e^{(\ln f(x))'} = e^{(\ln a^x)'} = e^{(x \ln a)'} = e^{\ln a} = a$$

Co było do pokazania. W szczególności $(e^x)^* = e$. □

Ćwiczenie 1. Wyznaczyć pochodne produktowe funkcji $f(x) = x^n$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x^x$

By lepiej sobie zobrazować „działanie" pochodnej geometrycznej, rozważmy pewien przykład. Przyjrzyjmy się bliżej funkcji $f(x) = \sin x$.



Zauważmy, że pochodna produktowa funkcji, $f^*(x) = e^{\operatorname{ctg} x}$, ma okres dwukrotnie krótszy niż funkcja wyjściowa. Nie możemy bez dodatkowej wiedzy rozstrzygać, **kiedy** funkcja rośnie; wiemy natomiast, **jak** rośnie i kiedy przechodzi przez miejsca zerowe (wiemy? :)). Przypuszczamy, że funkcja będzie mieć ekstremum, gdy wartość pochodnej będzie równa 1 i będzie tam ściśle monotoniczna. Zwróćmy także, uwagę, iż pochodna produktowa jest dodatnia na całej swojej dziedzinie.

Przejdźmy do kolejnej części – w końcu rachunek różniczkowy to nie tylko pochodne. Przez kolejną analogię możemy dostać iloczynowy odpowiednik szeregu Taylora:

Twierdzenie 3. *Niech f będzie funkcją geometrycznie różniczkowalną $n+1$-krotnie w przedziale otwartym I, w którym istnieje taki punkt $c \in I$, że $f^{[i]}(c) \neq 0$ dla wszystkich $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, wtedy dla każdego takiego $x \in I$, że $x > c$, zachodzi:*

$$f(x) = f(c) f^*(c)^{(x-c)} f^{**}(c)^{\frac{(x-c)^2}{2!}} \cdots f^{[n]}(c)^{\frac{(x-c)^n}{n!}} R_n(x)$$

gdzie $R_n(x) = f^{[n+1]}(\xi)^{(x-c)^{n+1}}(n+1)!$ dla pewnego $c < \xi < x$.

Ten, jak i następne dowody zostaną pominięte; przeprowadza się według tej samej reguły, jaką można znaleźć w podręcznikach przy wykazywaniu prawdziwości powyższego twierdzenia dla klasycznego rachunku różniczkowego. O rozwinięciu pełnym w produkt możemy powiedzieć nieco więcej:

Twierdzenie 4. *Jeżeli $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale otwartym I, a $f^{[n]}(x)$ istnieje dla każdego $n \in \mathbb{N}$, oraz $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 1$, wtedy dla każdego $x \in I$, $x > c$ zachodzi:*

$$f(x) = \prod_{k=0}^{\infty} f^{[k]}(c)^{\frac{(x-c)^k}{k!}}$$

Powyższy *produkt Taylora* ściśle wiąże się z szeregiem Taylora. Niech f będzie funkcją analityczną określoną na pewnym przedziale otwartym oraz niech $f_{n'}$ będzie n-tym wyrazem rozwinięcia w szereg funkcji $\ln f$, a f_{n^*} n-tym czynnikiem rozwinięcia w produkt[1]. Wtedy zachodzi:

$$\prod_{n=0}^{\infty} \exp\left(f_{n^*}\right) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{n'}\right)$$

Ten fakt zachodzi także dla funkcji, które są ujemne na pewnych swoich przedziałach, jednak wtedy niezbędne jest skorzystanie z uogólnienia logarytmu naturalnego, by móc wnieść, iż $\ln(-1) = i\pi$, gdzie i jest jednostką urojoną[2]. Reszta jest już tylko prostą konsekwencją wcześniej podanych twierdzeń i samej definicji pochodnej produktowej. Rozwińmy przykładowo w produkt funkcję $f(x) = x$ na podstawie powyższej zależności w punkcie $c = 1$:

$$\exp\left(\ln n\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k}\right)$$

Możemy obliczać także całki produktowe:

$$\prod_a^b f(x)^{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \prod f(x_i)^h = \exp\left(\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x\right)$$

Tutaj niezbędne jest słowo komentarza. Symbol $\prod$ oznacza tutaj multiplikatywny operator całki produktowej (nieoznaczonej, jeżeli nie występują odpowiednie granice całkowania), natomiast x_i jest punktem podziału normalnego odcinka $[a, b]$, analogicznie jak w przypadku sum Riemanna. Zachodzi także:

$$f(x) = \left(\prod f(x)^{\mathrm{d}x}\right)^*$$

przy czym w odwrotnej kolejności uzyskuje się:

$$\left|\frac{f(x)}{\prod f^*(x)^{\mathrm{d}x}}\right| = c, \quad c \in (0, +\infty)$$

[1] Dla wygody przyjmijmy, iż $f_{0'} = f_{0^*} = f$.

[2] Wtedy $e^{i\pi} = -1$. Formalnie $\ln_k(-1) = i\pi(2k+1)$ dla pewnego k całkowitego; dla $k = 0$ otrzymujemy gałąź główną logarytmu naturalnego.

Czemuż by nie odtworzyć twierdzenia Newtona-Leibniza dla rachunku iloczynowego? Jak nietrudno zgadnąć, twierdzenie jest poniższej postaci:

Twierdzenie 5. *Jeżeli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale $[a,b]$, a F jest funkcją geometrycznie pierwotną funkcji f, wtedy zachodzi:*

$$\prod_a^b f(x)^{\mathrm{d}x} = \frac{F(b)}{F(a)}$$

Ćwiczenie 2. Wyznaczyć produktowe całki nieoznaczone: $\prod e^{\frac{\mathrm{d}x}{x}}$, $\prod x^{n\mathrm{d}x}$, $\prod_0^e \left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{d}x}$.

O kolejnych analogiach (reguła de l'Hospitala, całkowanie przez części, reguła łańcuchowa, równania różniczkowe etc.) można byłoby mówić wiele. Resztę pozostawiam do rozważenia Czytelnikowi. A nuż ktoś zainspirowany przedstawi pochodne harmoniczne w którymś z kolejnych numerów? A może pójdzie w inną stronę i zdefiniuje np. metrykę produktową na bazie modułu produktowego[3]? :)

[Literatura]

[1] John D. Dollard, Charles N. Friedman *Product Integration, with Applications to Differential Equations.* Addison-Wesley, 1979.

Odpowiedzi do zadań:

1. $f^*(x) = e^{n/x}$, $g^*(x) = e^{-\operatorname{tg} x}$, $h^*(x) = ex$,
2. $\prod e^{\frac{\mathrm{d}x}{x}} = x$, $\prod x^{n\mathrm{d}x} = e^{-nx}x^{xn}$, $\prod_0^e \left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{d}x} = 1$.

Mateusz Szymański

[Informatycy na karaoke]

Wakacje idą! Jakkolwiek dla studentów mieszkających w akademikach oznacza to początek racjonalnej diety i spokojniejszego życia po powrocie do rodziców, dla większości społeczności studenckiej wakacje to dopiero początek najbardziej szalonych zabaw, których wyniku nierzadko nie będziemy chcieli sobie przypominać[4]. Jak jednak przemycić kawałek naszych

[3]Rozważmy dla $x > 0$ funkcję zdefiniowaną następująco: $\overset{*}{|a|} = \begin{cases} x & x \geqslant 1 \\ \frac{1}{x} & x < 1 \end{cases}$. Narzucającym się uogólnieniem dla liczb ujemnych oraz zespolonych jest oczywiście $\overset{*}{|a|} = e^{|\ln x|}$.

[4]I, na szczęście, w większości przypadków nie będziemy w stanie.

ukochanych nauk ścisłych do zabaw? Czy na temat zabaw i imprez wszelakich dałoby się napisać artykuł? Publikację naukową?

Zastanówmy się na początek, co mogłoby być jej tematem. Jako że znakomita większość naszych Czytelników to matematycy lub informatycy, pozostańmy, dla ustalenia uwagi, w tych dwóch dziedzinach nauk. Nierozerwalnie wiążą się one z liczbami, obliczeniami. Co można liczyć na zabawach? Wiele rzeczy, zdecydowanie, ale z samych obliczeń publikacja nie powstanie. Potrzebne są jeszcze związki, korelacje, które niekoniecznie każdy zauważy, których ekspozycja w świetle dziennym powiększyłaby wiedzę rodzaju ludzkiego o jakiś istotny szczegół.

I siedzi nasz hipotetyczny informatyk przy komputerze, puszczając kolejne pliki mp3 i myśląc, jakie związki mógłby tu wskazać. I nagle – eureka! W dobie kompresji i chęci zapisywania wszystkiego w komputerze pojawia się naturalne pytanie: ile miejsca potrzeba, by zapisać piosenkę? No, dla uproszczenia, tekst piosenki, nie martwmy się muzyką. Wraz ze wzrastającą długością piosenki, jak wiele danych musimy przekazać komputerowi, by był on w stanie podać nam cały tekst?

Wprowadźmy tutaj trochę oznaczeń, potrzebnych nam dla płynniejszej komunikacji w dalszej części artykułu. Powiemy, że funkcja rzeczywista f należy do $O(g(n))$, gdzie g również jest funkcją rzeczywistą, jeżeli istnieje taka stała A, że dla dostatecznie dużych n $f(n) \leqslant Ag(n)$. Innymi słowy, w nieskończoności funkcja f rośnie nie szybciej niż g. Oznaczenie to poznaje każdy student matematyki na zajęciach z informatyki; mianowicie: powiemy, że program ma złożoność (czasową) $O(n)$, jeżeli zależność między ilością wprowadzonych danych a czasem potrzebnym na wykonanie programu jest liniowa; $O(n^2)$ jeżeli jest kwadratowa, i tak dalej. Wiemy, że duże potęgi n nie są własnością pożądaną w takiej złożoności, bowiem oznacza to że, w przypadku n^2, dziesięciokrotne zwiększenie ilości danych oznacza stukrotny wzrost czasu potrzebnego do uzyskania wyniku – a tak ogromny skok w zastosowaniach, na przykład, biznesowych jest w naturalny sposób trudny do przełknięcia. Poza złożonością czasową możemy też mówić o złożoności pamięciowej, kiedy to zamiast czasu potrzebnego na uzyskanie wyniku interesuje nas ilość pamięci potrzebna naszemu hipotetycznemu programowi. I znowu, złożoność $O(n^2)$ oznaczałaby tu, dla przykładu, że dziesięć razy więcej danych oznacza sto razy więcej potrzebnej pamięci.

Drugim oznaczeniem będzie tzw. działanie konkatenacji: jeżeli R i S oznaczają pewne ciągi znaków, to RS oznacza ciąg znaków uzyskany przez połączenie ciągów R i S. Dla przykładu, jeżeli $R =$ Koń i $S =$ Rafał, to $RS =$ KońRafał. Poprzez ε oznaczać będziemy pusty ciąg znaków. W szczególności $R\varepsilon = R$ dla każdego ciągu znaków R.

Na tym etapie możemy postawić sobie pytanie, które stanie się bazą dla naszej mini publikacyjki: jeżeli n jest długością piosenki, to czy da się stworzyć program drukujący jej tekst o złożoności pamięciowej mniejszej niż $O(n)$? (stworzenie programu o złożoności $O(n)$ jest, oczywiście, trywialne).

Problem ten, wbrew pozorom, ma całkiem długą historię – w końcu jakąż inną motywację mogli mieć nasi przodkowie, wymyślając instytucję refrenu? Istotnie, refren pozwala nam poznać cały tekst piosenki, jako dane wejściowe posiadając tylko pewną jego część; formalniej rzecz biorąc, zachodzi następujący lemat:

Lemat 1. *Jeżeli S jest taką piosenką o m zwrotkach długości Z i refrenie o długości R, że refren jest śpiewany na początku i końcu piosenki oraz pomiędzy każdymi dwiema zwrotkami, to złożoność pamięciowa piosenki S wynosi $\frac{Z}{Z+R}n+O(1)$ dla ustalonych Z i R i zmiennego m. Symbol n oznacza tu całkowitą długość piosenki.*

Dowód. Całkowita długość piosenki wynosi $n = R+(Z+R)m$. Oczywiście w danych wejściowych refren musi pojawić się tylko raz, stąd złożoność pamięciowa piosenki dana jest wzorem $c = R + Zm$. Stąd łatwo widać, że

$$c = R + Zm = n - Rm \leqslant \frac{Z}{Z+R}n + A$$

dla $A = \frac{R^2}{V+R}$. □

Oczywiście w przyjętej notacji dużego O nasza złożoność pamięciowa ciągle wynosi $O(n)$; czy da się ją zmniejszyć w sposób istotny, na przykład do $O(\sqrt{n})$? Istotnie – zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Istnieje piosenka o złożoności $O(\sqrt{n})$.*

Dowód. Rozważmy następujący schemat:

$$V_0 = \text{„Kaczor Donald farmę miał”}R_1$$

$$R_1 = \text{„I-ja i-ja ooo!”}$$

$$R_2(x) = V_0\text{„Na niej } x \text{ hodował”}R_1\text{„i”}$$

$$U_1(x) = \text{„}x\text{-}x\text{ tu i „}x\text{-}x\text{ tam, i tu } x \text{ i tam } x \text{ wszędzie } x\text{-}xR_1\text{”}$$

$$V_k = U_1(W_k)V_{k-1}.$$

Tutaj $W_1 = \text{ko}, W_2 = \text{gę}, W_3 = \text{mu}, W_4 = \text{hau}$ (konstrukcję tę da się uogólnić dla większych k). Piosenkę rzędu m definiujemy jako

$$S_0 = \varepsilon$$

$$S_m = R_2(W'_m)V_mS_{m-1}.$$

Tutaj $W'_1 = \text{kury}, W'_2 = \text{gęsi}, W'_3 = \text{krowy}, W'_4 = \text{psy}$ (i znowu, konstrukcję da się prowadzić dla większych k). Żmudne przeliczenia, do których zachęcamy zainteresowanych Czytelników, doprowadziłyby nas do wniosku, że długość naszej piosenki rośnie kwadratowo w stosunku do ilości danych wejściowych. Przykład ten został podany przez szkockiego farmera O. MacDonalda, oryginalnie w języku angielskim. Niektórzy badacze sądzą jednak, że piosenki podobnego typu o złożoności $O(\sqrt{n})$ pojawiały się już wcześniej. □

Ten przykład daje nam nadzieję na dalsze ulepszanie naszej złożoności pamięciowej. Klasyczna angielska piosenka „Twelve Days of Christmas" jest przykładem piosenki o złożoności $O(\sqrt{\frac{n}{\log n}})$. Konstrukcję z niej da się uogólnić w piękny sposób, co po raz pierwszy uczynił J.W. Blatz z Milwaukee, Wisconsin, odkrywając klasę piosenek znaną jako „m bottles of beer on the wall". Dzięki temu prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2. *Istnieje piosenka o złożoności $O(\log n)$.*

Dowód. Definiujemy

$$V_k = T_kBWT_kB \text{ If one of those bottles should happen to fall, } T_{k-1}BW,$$

gdzie $B = \text{bottles of beer}, W = \text{on the wall}$ oraz T_k jest po prostu ciągiem znaków oznaczającym liczbę k w języku angielskim, np. $T_{23} = \text{twenty three}$. Zdefiniowanie T_k dla wszystkich $k < 10^m$ wymaga jedynie $O(m)$ pamięci, bowiem

$$T_{q\cdot 10^m+r} = T_q \text{ times 10 to the } T_m \text{ plus } T_r$$

dla $1 \leqslant q \leqslant 9, 0 \leqslant r \leqslant 10^{m-1}$. Wówczas piosenka rzędu k, zdefiniowana przez $S_0 = \varepsilon, S_k = V_kS_{k-1}$ ma wymaganą złożoność $O(\log n)$. □

Wydaje się, że jest to twierdzenie koronujące naszą teorię złożoności pamięciowej piosenek. Prawda jest taka, że jedynym możliwym dalszym (znaczącym) ulepszeniem byłoby podanie przykładu piosenki o stałej złożoności pamięciowej; wydaje się, że jest to w oczywisty sposób niemożliwe. A jednak, przykład Casey and the Sunshine Band udowadnia prawdziwość następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3. *Istnieje piosenka o złożoności $O(1)$.*

Dowód. Niech $V_k = \text{That's the way } U \text{ I like it } U, U = \text{uh huh uh huh}$ dla wszystkich k oraz $S_0 = \varepsilon, S_k = V_kS_{k-1}$. Wówczas S_k jest wymaganym przykładem. □

Malejące możliwości pamięciowe dzisiejszych imprezowiczów dają nadzieję na dalszy rozwój tej pięknej teorii, mimo faktu, że obecnie wydaje się że powyższe twierdzenie jest jej ostatecznym ukoronowaniem. Odpowiedzmy sobie jednak na pytanie, które zapewne pali wszystkich naszych Czytelników od początku niniejszego artykułu: Czy ja mówię poważnie? Czy to naprawdę mógłby być materiał na publikację? Co najwyżej na satyryczną, czyż nie?

Powyższe rozumowanie pojawiło się w artykule *The Complexity of Songs*, opublikowanym w *Communications of the ACM* w kwietniu 1984 roku. Artykuł został napisany przez Donalda E. Knutha, informatyka znanego głównie ze swego wielkiego dzieła *Sztuka programowania* oraz ze stworzenia systemu składu drukarskiego, w którym piszemy niniejszą gazetkę. Data ukazania się artykułu – kwiecień – oczywiście sugeruje odpowiedź na pytanie, na ile poważnie powinniśmy traktować podobne rozważania, pomimo ich pełnej matematycznej poprawności i precyzji (w oryginalnym artykule zamieszczone są wszelkie przeliczenia, które tu pozwoliłem sobie pominąć).

Czy zatem publikacje powstają jedynie na poważne tematy? Czy badacze nie mogą się nimi trochę zabawić? Cóż, przy powstających publikacjach o najlepszej drużynie baseballu na świecie (ach, te metody statystyczne), o prominentnej roli pingwinich diagramów w fizyce kwantowej czy algorytmie Coxa-Zuckera, powiedziałbym, że odpowiedź brzmi – oczywiście, że badacze potrafią się bawić. I miejmy nadzieję, że gdy my już nimi zostaniemy, również tę własność zachowamy.

Miłych wakacji!
Niewinny Rosomak

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Mateusz Jurczyński, Beata Łojan,
Mateusz Szymański, Joanna Zwierzyńska
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

`macierzator@knm.katowice.pl`.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`.
Wydanie elektroniczne [Macierzatora] posiada numer ISSN: 2083-9774.

czerwiec 2012