Paweł Gładki

Program Hilberta

1.Wstęp.

Tematem niniejszego referatu jest tzw. Program Hilberta. Pojęcie to nieodłącznie wiąże się z kryzysem podstaw matematyki, jaki miał miejsce na początkach naszego wieku. Kryzys ten, o którym można pisać praktycznie w nieskończoność, był niewątpliwie jednym z przełomowych etapów w historii matematyki i dlatego też często bywa nazywany Drugim Wielkim Kryzysem Matematyki. Pierwszy taki kryzys wiązał się z odkryciem przez pitagorejczyków liczb niewymiernych - i zapewne każdy słyszał o nim w szkole średniej, o ile nie w podstawowej, a jeśli nawet nie, to bez trudu może zapoznać się z odnośną literaturą o charakterze popularnonaukowym; można tu wymienić wiele pozycji, chociażby pasjonujące książki Szczepana Jeleńskiego, „Lilavati” lub „Śladami Pitagorasa”. Drogą przypomnienia pragnę zwrócić uwagę, że gdy pitagorejczycy zgłębiając zagadnienia niewspółmierności odkryli liczby niewymierne, uznali fakt ich istnienia za tajemnicę wykradzioną olimpijskim bogom; dlatego też najwyższym poziomem wtajemniczenia w Akademii Pitagorejskiej były właśnie zagadnienia związane z twierdzeniem Pitagorasa. Problem ten, z dzisiejszego punktu widzenia, dotyczy matematyki jak najbardziej elementarnej, dlatego też postuluję tezę, że każdy słyszał o Pierwszym Kryzysie Matematyki.

Z kolei Drugi Kryzys Matematyki dotyczy jej podstaw i - jak to często w matematyce bywa - problem pozornie traktujący o matematyce elementarnej, wcale nie jest taki elementarny. Dzieje się tak dlatego, że podstawy matematyki a matematyka elementarna to, z praktycznego punktu widzenia, rzeczy w zasadzie zupełnie inne. Dlatego też szumna nazwa Drugi Wielki Kryzys Matematyki nie jest w pełni adekwatna - tak naprawdę ów wielki kryzys dotyczył li tylko podstaw matematyki, poszczególne jej działy, takie jak np. analiza, algebra, rozwijały się mimo Wielkiego Kryzysu w sposób raczej niezakłócony.

Prawdopodobnie Drugi Wielki Kryzys Matematyki nigdy nie ujrzałby światła dziennego, gdyby nie prace Cantora [1] i stworzona przez niego teoria mnogości. O historii jej powstania napisano już wiele grubych książek, nie jest więc moim zamiarem nawet skrócone streszczanie tego etapu dziejów matematyki. Myślę także, że podstawowe pojęcia związane z tym działem matematyki są Czytelnikowi doskonale znane.

Omówienie kilku antynomii „naiwnej” teorii mnogości będzie punktem wyjścia w naszych rozważaniach. W dalszym toku pracy przedstawię próby uporania się przez matematyków z owymi antynomiami, a zwłaszcza jedną z nich - pionierską ideę Hiberta, z której narodził się program, nazwany jego imieniem. Program, którego zamierzenia sięgały o wiele dalej, niż poza chęć wyeliminowania antynomii teoriomnogościowych, który postawił sobie ambitny cel wykazania niesprzeczności całej dotychczasowej matematyki.

[1] Cantor Georg (1845-1918) - matematyk niemiecki, twórca teorii mnogości; studiował matematykę w Zurychu i Berlinie, uczył w berlińskim gimnazjum i przez ponad 30 lat był profesorem matematyki w Halle; prace dotyczące m.in.: teorii liczb, równoliczności, przeliczalności, mocy zbioru itd.; prace nad teorią mnogości i odkryte w niej antynomie wpędziły go w chorobę nerwową, z powodu której zaniechał dalszych badań teoriomnogościowych.
Ten i pozostałe przypisy dotyczące nazwisk za: *„Encyklopedia szkolna. Matematyka”, praca zbiorowa pod red. Włodzimierza Waliszewskiego, WSiP, Warszawa 1992*

2. Antynomie teorii mnogości.

Pierwsze „zgrzyty” w teorii Cantora pojawiły się w związku z badaniami właściwości liczb kardynalnych i porządkowych. W roku 1897 Burali-Forti zauważył, że nie wolno rozpatrywać istnienia zbioru złożonego ze wszystkich liczb porządkowych, gdyż zbiór ten byłby dobrze uporządkowany, a zatem izomorficzny z jednym ze swych odcinków właściwych, co jest niemożliwe [2].

Z kolei G. Cantor w roku 1899 stwierdza w liście do Dedekinda[3], że nie można powiedzieć, że liczby porządkowe tworzą zbiór. Podobnie stwierdza też, że nie można rozpatrywać „zbioru wszystkich zbiorów”, albowiem zbiór części takiego zbioru Ω byłby równoliczny z częścią Ω, co byłoby sprzeczne z nierównością $\mathbf{m} < \mathbf{2}^{\mathbf{m}}$ [4].

W 1905 roku Russell [5] analizując dowód tejże nierówności pokazuje, że użyte w nim rozumowanie dowodzi bez powoływania się na teorię liczb kardynalnych sprzeczności pojęcia „zbioru zbiorów nie będących swymi własnymi elementami” [6].

Rozważania te wydawały się może abstrakcyjne i oderwane od „codziennych” zastosowań matematyki, lecz wkrótce pojawiły się paradoksy zagrażające najbardziej klasycznym częściom matematyki. Otóż wspomniany już Bertrand Russell studiując dzieło Fregego [7] „Grundlagen der Arithmetik” [8] odkrył, że system logiki, do którego ten ostatni redukuje arytmetykę liczb naturalnych, jest sprzeczny - można w nim bowiem zbudować antynomię Russella. Ponadto wespół z matematykiem angielskim Berrym pokazał, że zbiór liczb całkowitych, których definicję można wypowiedzieć za pomocą mniej niż szesnastu słów francuskich jest skończony, zaś określenie liczby jako „najmniejszej liczby całkowitej, której nie da się zdefiniować za pomocą mniej niż szesnastu słów francuskich” prowadzi do sprzeczności, gdyż definicja ta zawiera tylko piętnaście słów.

Przytoczone przykłady, aczkolwiek raczej odległe od bieżącej praktyki matematycznej, wskazywały na konieczność zrewidowania jej podstaw, celem wyeliminowania podobnych niedorzeczności. Pojawił się szereg rozwiązań, z których kilka chciałbym przypomnieć.

---

[2] Omawianie tutaj paradoksów teorii mnogości ma charakter informacyjny i uzupełniający; Czytelników bliżej zainteresowanych tymi zagadnieniami odsyłam do bardzo ciekawej lektury: *„Opowieści o zbiorach”, N.J.Wilenkin, PWN, Warszawa 1972,* lub do opracowań naukowych: *„Sopra un teorema del Sig. G. Cantor”, C. Burali-Forti, Atti Accad., Torino, t XXXII; „Gesammelte Abhandlungen”, G. Cantor, Springer, Berlin 1932; „Principia Mathematica”, B. Russell, A.N. Whitehead, 3 vol., Cambridge 1910-13; „Les principes des Mathematiques et le probleme des ensembles”, J. Richard, Rev. Gen. Des Sci. Pures et appl., t.XVI;*

[3] Dedekind Julius Wilhelm Richard (1831-1916) - matematyk niemiecki; zajmował się algebrą, teorią liczb i podstawami analizy matematycznej; twórca ścisłej teorii liczb rzeczywistych.

[4] Chodzi tu naturalnie o liczby kardynalne; tradycyjne ich oznaczenie czcionką gotycką z przyczyn technicznych było niemożliwe w trakcie pisania niniejszego referatu.

[5] Russell Bertrand Arthur William (1872-1970) - angielski filozof, logik i matematyk; zajmował się zwłaszcza podstawami matematyki i zagadnieniami teorii mnogości; wspólnie z matematykiem anglo-amerykańskim A.N. Whiteheadem napisał dzieło *„Principia mathematica” (1910-13, Zasady matematyki)*, w którym m.in. analizował pojęcie liczby naturalnej.

[6] Ten najbardziej znany paradoks zwany jest „antynomią Russella”.

[7] Frege Gottlob Ludwig (1848-1925) - niemiecki matematyk i logik, zajmował się logiką matematyczną i podstawami matematyki; wprowadził kwantyfikatory, zaksjomatyzował rachunek zdań; pierwszy sformalizował teorię matematyczną *(„Die Grundlagen der Arithmetik” , 1884 - Podstawy arytmetyki)*, sprecyzował pojęcie liczby naturalnej; badania zapoczątkowane przez Fregego kontynuowali matematycy angielski B.Russell i anglo-amerykański A. N. Whitehead

[8] *„Die Grundlagen der Arithnmetik”, G. Frege, 2nd edition with an English translation by J.L.Austin, New York, 1950*

Kronecker[9] zasugerował ograniczenie matematyki do liczb naturalnych (mówiąc w pewnym skrócie). Podważał on zasadność rozumowań operujących nieskończonością aktualną [10], dopatrując się w niej źródła antynomii.

Poincare [11] dopatrywał się źródła antynomii w niepredykatywności matematyki[12], dlatego też proponował ograniczenie metod matematycznych tylko do metod predykatywnych.

Z kolei Brouwer[13] wyszedł z programem radykalnej przebudowy matematyki, zmierzającym do oparcia jej na pierwotnej intuicji liczby naturalnej.

Wszystkie te zamierzenia miały niewątpliwie jedną cechę wspólną; zmierzały do rezygnacji z pewnych metod (a wręcz działów) matematyki, zwłaszcza tych operujących nieskończonością aktualną. Nie zadowalało to oczywiście wszystkich matematyków...

3.Pionierska idea Hilberta.

> „To co robią Weyl i Brouwer to nic innego jak pójście w ślady Kroneckera! Próbują oni uratować matematykę wyrzucając z niej wszystko to, co sprawia kłopot... Jeśli zgodzimy się na takie propozycje, to ryzykujemy utratę wielu największych naszych skarbów. (...) Z raju, który stworzył nam Cantor, nikt nie powinien móc nas wypędzić!"[14]

Ta słynna wypowiedź matematyka niemieckiego Hilberta[15] jest swego rodzaju kamieniem węgielnym pod fundamentami programu Hilberta.. Używając dalej „terminologii budowlanej", pierwszą cegiełką tego programu był wygłoszony na II Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu wykład, podczas którego Hilbert ogłosił swoje słynne tezy: 23 problemy matematyczne wymagające, jego zdaniem, niezwłocznego rozwikłania. Pod numerem 2 znalazł się tam postulat wykazania niesprzeczności aksjomatów arytmetyki (pod tym terminem rozumiał Hilbert wówczas teorię liczb i analizę), który, jak możemy

---

9 Kronecker Leopold (1823-1891) - matematyk niemiecki, zajmował się przede wszystkim algebrą, teorią liczb i teorią funkcji eliptycznych; głosił idee arytmetyzacji matematyki; wypowiedział znaną sentencję: „Liczby naturalne stworzył dobry Bóg, wszystko inne jest dziełem człowieka"

10 Nieskończoność aktualna - mówiąc obrazowo, zbiory zawierające nieskończenie wiele przedmiotów pojmowanych jako istniejące jednocześnie, przynajmniej w myśli; w odróżnieniu od nieskończoności potencjalnej, tj. możliwości zwiększania każdej wielkości danej, znanej już w starożytności, np. w określeniu Euklidesa nieskończoności zbioru liczb pierwszych: „Dla każdej ilości danej liczb pierwszych istnieje większa"

11 Poincare Henri (1854-1912) - francuski matematyk i fizyk; zajmował się wszystkimi niemal ówcześnie znanymi dziedzinami matematyki, m. in.: równaniami różniczkowymi i rachunkiem prawdopodobieństwa; był jednym z pierwszych, którzy zainteresowali się problematyką topologiczną; badał również geometrie nieeuklidesowe - znany jest model Poincarego geometrii hiperbolicznej. W wielu dziedzinach matematyki osiągnął ważne wyniki, jednak żadnej nie poświęcił się wyłącznie, mówiono o nim: „Zdobywca, lecz nie kolonizator". W matematyce stosowanej ważne osiągnięcia miał w tak różnych jej dziedzinach, jak optyka, elektromagnetyzm, termodynamika, teoria potencjału, mechanika nieba, teoria kwantów, teoria względności i kosmologia. Poincare opublikował ponad 30 książek i ok. 500 artykułów naukowych. Był również wybitnym popularyzatorem matematyki.

12 Definicje niepredykatywne - takie, w których definiuje się pewien obiekt N poprzez odwołanie się do pewnego ogółu obiektów E, którego N jest jednym z elementów, np. klasyczna definicja liczb naturalnych: Zbiór liczb naturalnych jest to najmniejszy zbiór zawierający liczbę 0 i zamknięty ze względu na funkcję następnika

13 Brouwer Luitzen (1882-1967) - holenderski matematyk i logik; profesor uniwersytetu w Amsterdamie; twórca kierunku zwanego intuicjonizmem w teorii podstaw matematyki i logiki

14 „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben konnen"; ten najsłynniejszy cytat Hilberta pochodzi z: *„Uber das Unendliche"*, *Matematische Annalen 95 (1926)*

15 Hilbert David (1862-1943) - matematyk niemiecki; zajmował się algebraiczną teorią liczb, teorią równań całkowych, zagadnieniami rachunku wariacyjnego, podstawami geometrii i logiki matematycznej oraz problemami fizyki matematycznej; był profesorem uniwersytetu w Getyndze, jednego z najważniejszych wówczas ośrodków myśli matematycznej na świecie; w 1900 roku na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu przedstawił 23 zagadnienia dotyczące podstawowych wg niego kierunków badań matematycznych, które do dzisiaj przyciągają uwagę matematyków całego świata

domniemywać, narodził się w konsekwencji ogłaszania w tamtym okresie kolejnych paradoksów teoriomnogościowych i ich związków z matematyką klasyczną. Wykazanie niesprzeczności arytmetyki przerodziło się z biegiem czasu w program ugruntowania matematyki klasycznej operującej nieskończonością aktualną, czyli program Hilberta. Stał się on z kolei podwaliną pod nowy kierunek w filozofii matematyki, mianowicie pod formalizm, który obecnie obok logicyzmu Fregego i Russella oraz intuicjonizmu Brouwera jest jednym z najprężniej rozwijających się kierunków współczesnej filozofii matematyki.[16]

4. Pierwszy etap realizacji programu Hilberta.

Program Hilberta wywodził się, jak już wspomniałem, z postulatu wykazania niesprzeczności arytmetyki. Ten zaś postulat powstał w efekcie zamieszania wywołanego odkryciem paradoksów teoriomnogościowych. Z kolei paradoksów tych zapewne w ogóle by nie było, gdyby nie perypetie matematyków z rozumieniem nieskończoności aktualnej. Stąd też oczywisty związek programu ugruntowania matematyki klasycznej z zagadnieniami nieskończoności, o którym to związku wspomina Hilbert w słowach:

> „Definitywne wyjaśnienie natury nieskończoności stało się koniecznością nie tylko ze względu na specjalne znaczenie tej kwestii dla tej czy innej nauki, ale także dla uczczenia samego umysłu ludzkiego”[17]

Podzielając poglądy Kanta[18] Hilbert uważał, że nieskończoność matematyczna jest ideą czystego rozumu, zatem jest pojęciem wewnętrznie niesprzecznym, któremu wszakże w zmysłowo poznawalnej rzeczywistości nic nie odpowiada. Niejako wbrew temu pisał:

> „Już Kant uczył, że matematyka rozporządza treścią zabezpieczoną niezależnie od wszelkiej logiki i dlatego nigdy nie może być uzasadniona przez samą logikę; z tego właśnie powodu wysiłki Fregego i Dedekinda musiały spełznąć na niczym. Coś musi już być dane w przedstawieniu jako warunek wstępny dla stosowania wnioskowań i wykonywania operacji logicznych: są to mianowicie pewne pozalogiczne konkretne przedmioty, które tam występują poglądowo, jako bezpośrednie przeżycia, przed wszelkim myśleniem. Jeżeli myślenie logiczne ma być pewne, to przedmioty te muszą się dawać całkowicie ogarnąć jednym spojrzeniem we wszystkich ich częściach; a to, że następują jedynie po drugich lub są zestawione jedne obok drugich, jest bezpośrednio poglądowo dane wraz z samymi tymi przedmiotami jako coś, co ani się nie da zredukować do czego innego, ani nie potrzebuje takiej redukcji. Takie jest podstawowe stanowisko logiczne, które uważam za potrzebne dla matematyki i w ogóle dla całego naukowego myślenia, rozumienia i porozumiewania się”.[19]

W myśl powyższego Hilbert podzielił matematykę na dwa podstawowe części: **finitystyczną i infinitystyczną.** Finitystyczna część to ta, która nie wymaga żadnych uzasadnień. Mamy w niej do czynienia ze **zdaniami realnymi,** w pełni sensownymi,

[16] Czytelników bliżej zainteresowanych problemami filozofii matematyki odsyłam do świetnej książki: *„Filozofia matematyki. Zarys dziejów”, R. Murawski, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. A. Mickiewicza, Poznań 1993*

[17] *„Uber das Unendliche”, Matematische Annalen 95 (1926)*

[18] Kant Immanuel (1724-1804) - filozof niemiecki; czołowy przedstawiciel klasycznej filozofii niemieckiej; twórca poglądu zwanego krytycyzmem teoriopoznawczym; głosił, że poznanie możliwe jest dlatego, że że umysł ludzki narzuca niepoznawalnym rzeczom samym w sobie aprioryczne (pochodzące z samego umysłu) formy i kategorie; poglądy Kanta prowadziły do agnostycyzmu; „Krytyka czystego rozumu”

[19] *„Uber das Unendliche”, Matematische Annalen 95 (1926)*

albowiem w pełni odwołującymi się do konkretnych obiektów. Część infinitystyczna to ta, która potrzebuje ugruntowania. Operuje ona **zdaniami idealnymi**, odwołującymi się do wielkości nieskończonych. W myśl idei Hilberta każde prawdziwe zdanie realne miało mieć dowód finitystyczny, zaś obiekty i metody infinitystyczne grać miały wyłącznie rolę pomocniczą, miały pozwalać na konstruowanie dowodów prostych, krótkich i eleganckich, które można by zastąpić dowodami finitystycznymi.

Tu jednakże napotykamy na pierwszą istotną trudność. W żadnej pracy Hilberta nie znajdujemy precyzyjnej definicji pojęcia „finitystyczności", stąd też liczne niedomówienia i dosyć swobodna interpretacja tego kluczowego terminu. Zazwyczaj wszakże przyjmuje się rozumowanie finitystyczne jako rozumowanie pierwotnie rekurencyjne w sensie Skolema[20]. Choć oczywiście nie brak i innych interpretacji.[21] Podobny problem wiąże się z definicją pojęcia zdania realnego. Za Taitem przyjmujemy, że zdania realne to zdania języka arytmetyki Peano PA w postaci $\forall x \varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest formułą zawierającą formuły atomowe, spójniki zdaniowe i ewentualnie kwantyfikatory ograniczone[22]. Zdania tej klasy oznaczamy z reguły jako zdania klasy Π_1^0.

Aby ugruntować matematykę infinitystyczną, należało się oprzeć na bezpiecznych i pewnych metodach finitystycznych. Hilbert zasugerował, aby uczynić to za pomocą jego **teorii dowodu**, czyli dziedziny matematyki, której przedmiotem były dowody matematyczne, które należało badać metodami matematycznymi. W przypadku działań mających na celu ugruntowanie matematyki, należało wykazać, że dowody stosujące elementy idealne w celu udowodnienia zdań realnych zawsze prowadzą do poprawnych wyników. Sprowadzało się to do udowodnienia ich **zachowawczości** i **niesprzeczności**. Cóż to takiego? W odniesieniu do teorii Hilberta, problem zachowawczości polegał na pokazaniu, że każde zdanie możliwe do udowodnienia w matematyce infinitystycznej (nieskończoność aktualna!) może być dowiedzione w matematyce finitystycznej. Używając terminologii logiki, należało pokazać, że matematyka infinitystyczna jest zachowawczym rozszerzeniem matematyki finitystycznej względem zdań realnych (w dalszym toku rozważań będę posługiwał się głównie tym terminem). W praktyce oznaczało to wskazanie „słownika" do tłumaczenia dowodów infinitystycznych zdań realnych na dowody finitystyczne. Z kolei problem niesprzeczności polegał na wykazaniu za pomocą środków finitystycznych, iż cała matematyka infinitystyczna (w szczególności matematyka klasyczna) jest niesprzeczna.[23] Intuicyjnie wyczuwamy, że problemy te ściśle się ze sobą wiążą.[24]

---

[20] Konieczne jest tutaj wyjaśnienie pojęcia pierwotnej rekurencji w sensie Skolema. Jest to pierwotna rekurencja w arytmetyce Skolema (zwanej także systemem PRA arytmetyki pierwotnie rekurencyjnej), która to z kolei arytmetyka jest systemem sformalizowanym pierwszego rzędu wyrażonym w języku zawierającym symbole pozalogiczne: 0 (stała liczba zero), symbol funkcyjny 1-argumentowy S (funkcję następnika) oraz symbol **f** dla każdej funkcji pierwotnie rekurencyjnej f. Aksjomaty pozalogiczne arytmetyki Skolema to aksjomaty dotyczące liczebników 0,S0,SS0,... (czyli nazw poszczególnych liczb naturalnych 0,1,2...), równania definicyjne dla funkcji pierwotnie rekurencyjnych oraz schemat indukcji dla formuł bezkwantyfikatorowych. Brzmi to może i zawile, ale w gruncie rzeczy jest jakoś dziwnie znajome... Patrz także: przypisy o teoriach sformalizowanych.

[21] Podanych m.in.: przez M. Detlefsena, C. Smoryńskiego, D. Prawitza itd. Bliżej zainteresowanych Czytelników odsyłam do następujących opracowań naukowych: *„On interpreting Godel's second theorem", M. Detlefsen, Journal of Philosophical Logic 8 (1979); „Hilbert's programme", C. Smoyryński, CWI Quarterly I (1988); „Philosophical aspects of proof theory", D. Prawitz, w „Contemporary Philosophy. A New Survey", G. Flostad (ed.), Martinus Nijhoff Publishers, The Hague-Boston-London 1981*

[22] Wyjaśnienie tych pojęć w przypisach o teoriach sformalizowanych

[23] Warto porównać przytoczone tu terminy z ich klasycznymi definicjami, podanymi w przypisach o teoriach sformalizowanych

[24] Formalnie wykazał to G. Kreisel ; zainteresowanych szczegółami odsyłam do: *„The incompletness theorems", C. Smoryński w „Handbook of Mathematical Logic", J. Barwise, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1977*

Mamy zatem podzieloną matematykę na część infinitystyczną i finitystyczną, wiemy z grubsza co pod tymi terminami należy rozumieć i wiemy, że ambitny plan ugruntowania matematyki sprowadza się w praktyce do rozwiązania za pomocą metod finitystycznych problemu niesprzeczności i problemu zachowawczości. Wiemy także, że oznacza to badanie dowodów matematycznych. Jak to jednak zrobić? Czy w ogóle można badać twory tak abstrakcyjne jak dowody matematyczne? Wprawdzie większość matematyków jest zgodna co do kwestii, czy dane rozumowanie jest dowodem, czy też nie, jednakże samo pojęcie dowodu jest raczej mętne. Frege i Russell (na bazie prac Peano[25]) podjęli próby ugruntowania matematyki na bazie systemów sformalizowanych[26] i przy tej okazji umożliwili nadanie słowu „dowód” ścisłe znaczenie. Twierdzenia stawały się w systemie sformalizowanym formułami, czyli skończonymi ciągami napisów, konkretnych obiektów, które można było badać, dowody zaś skończonymi ciągami formuł zbudowanych w myśl jasno sprecyzowanych zasad wnioskowania, a zatem skończonymi ciągami skończonych ciągów napisów, znowu konkretnych obiektów możliwych do badania. Dlatego też Hilbert zaproponował formalizację matematyki, a właściwie **rekonstrukcję jej infinitysycznej części jako wielkiego systemu sformalizowanego**, złożonego z takich działów jak logika klasyczna, teoria mnogości, arytmetyka liczb naturalnych, analiza. Ponadto tak sformalizowana matematyka musiała by być systemem zupełnym, co w tym konkretnym przypadku znaczyło, aby każde zdanie realne było możliwe do rozstrzygnięcia na bazie aksjomatów. Oczywiście aparat logiczny takiej teorii miałby charakter finitystyczny, tzn. Konkretne obiekty w teorii sformalizowanej badane by były metodami finitystycznymi.

Mając tak precyzyjnie zdefiniowany warsztat pracy, Hilbert przystąpił do dzieła, czyli do wykazania zachowawczości matematyki względem zdań realnych oraz na dowodzie jej niesprzeczności.

---

[25] Peano Giuseppe (1858-1932) - włoski matematyk i logik; podał aksjomatykę arytmetyki liczb naturalnych, udowodnił twierdzenie o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych, podał przykład krzywej wypełniającej kwadrat

[26] Najwyższa już pora podać kilka podstawowych pojęć związanych z teoriami sformalizowanymi. Pełniejszy zarys Czytelnik znajdzie np. w doskonałym podręczniku: *„Wstęp do matematyki współczesnej”, H. Rasiowa, PWN, Warszawa 1968.*

Sformalizowaną teorią matematyczną nazywamy uściślenie aksjomatyczne danej teorii. Pierwszym etapem w procesie formalizowania danej teorii matematycznej jest **formalizacja języka teorii**. W teoriach sformalizowanych zastępujemy język potoczny **językiem sformalizowanym,** tworzonym przez zespół symboli zwanych **znakami pierwotnymi teorii** oraz **reguły**, pozwalające nam w ściśle określony sposób tworzyć wyrażenia danego języka, zwane **formułami.** Rozróżniamy następujące rodzaje znaków pierwotnych teorii: **stałe specyficzne teorii** (symbole oznaczające wszystkie pojęcia pierwotne teorii aksjomatycznej), **zmienne indywiduowe** (symbole oznaczające dowolne przedmioty, którymi zajmuje się dana teoria), **zmienne wyższych typów** (symbole oznaczające dowolne obiekty matematyczne, którymi zajmuje się dana teoria, nie będące jednak indywiduami; jeśli w języku danej teorii sformalizowanej zmienne takie nie występują, to teorię nazywamy **elementarną**, a jej język **elementarnym**). Z tych znaków pierwotnych tworzy się **formuły atomowe**, czyli formuły odpowiadające najprostszym funkcjom zdaniowym danej teorii. Ponadto do znaków pierwotnych zaliczamy **funktory zdaniotwórcze** i **symbole kwantyfikatorów**. Z tych znaków tworzymy już wszystkie możliwe formuły danego języka, w szczególności **aksjomaty specyficzne**, czyli formuły odpowiadające aksjomatom danej teorii. Drugim etapem formalizacji jest ustalenie **aparatu logicznego** teorii, na który składają się **aksjomaty logiczne** (czyli formuły reprezentujące tautologie logiczne) i **reguły dowodzenia** (czyli formalny zapis reguł dowodzenia w danej teorii). Można teraz przystąpić do sformułowania pojęć: **dowodu formalnego** (czyli skończonego ciągu formuł z danej teorii takiego, że każda z nich jest bądź aksjomatem specyficznym, bądź logicznym, bądź powstaje z wcześniejszych formuł przez stosowanie reguł dowodzenia) i **twierdzenia teorii sformalizowanej** (czyli formuły, dla której istnieje dowód formalny). **Węższymi rachunkami funkcyjnymi** nazywamy systemy logiczne mające elementarny język sformalizowany i tak dobrany aparat logiczny, że dla każdej formuły przedstawiającej tautologię istnieje dowód formalny. Teoria sformalizowana jest **niesprzeczna**, jeśli nie można w niej przeprowadzić dowodu formalnego jednocześnie dla formuły A i ~A. Teoria matematyczna badająca sformalizowane teorie matematyczne zwana jest **metamatematyką**; najważniejszymi jej zagadnieniami są: niesprzeczność (patrz wyżej), **zupełność** (dana teoria jest zupełna, jeśli dla każdej jej formuły reprezentującej zdanie istnieje dowód jej, bądź jej negacji; w odróżnieniu od teorii **niezupełnej**, w której formuły bez powyższej własności nazywamy **zdaniami nierozstrzygalnymi**) i **rozstrzygalność** (dana teoria jest rozstrzygalna, jeśli w skończonej ilości kroków można stwierdzić o każdej formule, czy jest twierdzeniem, czy też nie).

5. Drugi etap realizacji programu Hilberta.

Zadanie wykazania zachowawczości i niesprzeczności sprowadzało się w sformalizowanej matematyce do badania dowodów sformalizowanych, czyli do badania skończonych ciągów napisów za pomocą bezpiecznych i sprawdzonych metod finitystycznych, co było głównym celem teorii dowodu Hilberta. Wielki matematyk wraz ze swymi uczniami odniósł niebawem pewne sukcesy na tym polu, na przykład W. Ackermann pokazał w 1924 roku niesprzeczność pewnego fragmentu arytmetyki liczb naturalnych[27]. Niestety, w roku 1930 miały miejsce wydarzenia, które doprowadziły do załamania programu Hilberta, ale o tym za chwilę.

6. Szkic historyczny.

Przedstawiona powyżej teoria i jej kolejność wykładania niewiele ma wspólnego z chronologią odkryć Hilberta. Zanim więc przejdziemy dalej w naszych rozważaniach myślę, że warto zapoznać się z kilkoma ważniejszymi datami w historii rozwoju programu.

W 1901 roku Hilbert brał udział w obradach Getyńskiego Towarzystwa Matematycznego. Omawiano tam problemy zupełności i rozstrzygalności, które E. Husserl steścił następująco: „Czy mam prawo powiedzieć, w oparciu o aksjomaty dla liczb naturalnych, że każde zdanie mówiące o tych liczbach jest prawdziwe, albo fałszywe?". Zagadnienie to, jak wiemy, było jednym z kluczowych problemów do rozwiązania w programie Hilberta.

W 1904 roku, na Kongresie Matematycznym, Hilbert pokazuje, że nie można udowodnić niesprzeczności matematyki za pomocą modelu, bo byłoby to równoważne przeniesieniu zagadnienia na grunt teorii mnogości, co w praktyce znacznie utrudniłoby zadanie. Sugeruje też traktować prawdziwe twierdzenia arytmetyki sformalizowanej jako zespoły znaków nie mających znaczenia i wykazać, że korzystając z reguł rządzących tworzeniem i powiązaniem tych zespołów nie da się utworzyć twierdzenia, które jest jednocześnie prawdziwe i nieprawdziwe. Podał dowód tego faktu dla formalizmu mniej złożonego niż arytmetyka.

Niestety, Poincare opierając się na pracach z 1902 pokazał, że dowód Hilberta korzysta z zasady indukcji, a zatem wpędza się w błędne kółko. Po tym wydarzeniu nastąpiła dłuższa przerwa w pracy Hilberta, który wznowił publikowanie swych wyników na ten temat w roku 1917 podczas wykładu w Zurychu. Prace te trwały z większymi przerwami do roku 1930, nasilając się nieco pod koniec lat dwudziestych. Z ważniejszych wykładów z tego okresu należy wymienić: Hamburg 1922, Lipsk 1922, Monastyr 1925, Hamburg 1927 (sprecyzowanie teorii dowodu; w metamatematyce rozumowanie musi opierać się na intuicyjnym pojęciu liczby całkowitej, a nie na arytmetyce sformalizowanej; w rozumowaniach metamatematycznych należy poprzestać na procesach skończonych) oraz słynny odczyt wygłoszony na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Bolonii w 1928, będący swego rodzaju podsumowaniem dokonań zespołu Hilberta i wytyczeniem dalszych kierunków działań, w tym w pierwszej kolejności:

---

[27] Przedstawianie technicznych szczegółów osiągnięć zespołu Hilberta nie jest celem niniejszej pracy; Czytelników zainteresowanych dokładniej osiągnięciami Hilberta i jego uczniów odsyłam do opracowań naukowych: *„Begrundung des tertium non datur mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit", W. Ackermann, Mathematische Annalen 93; „Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie", W. Ackermann, Mathematische Annalen 117; „Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems", F.E. Browder, Proceedings of Symposia in Pure mathematics, vol. XXVIII, Part 1 and 2, American mathematical Society Providence, Rhode island 1976; „Grundzuge der theoretischen Logik", D. Hilberts, W. Ackermann, 3.Aufl., Springer, Berlin 1949;*

a) znalezienia finitystycznego dowodu niesprzeczności analizy,
b) rozszerzenia tego dowodu na rachunki funkcyjne wyższych rzędów,
c) dowodu zupełności systemu aksjomatów dla teorii liczb i analizy,
d) dowodu pełności systemu reguł logicznych

7. Twierdzenia Godla o niezupełności a program Hilberta.

W dniach 5-7 września 1930 w Królewcu odbywała się II Konferencja Epistemologii Nauk Ścisłych, zorganizowana przez Gesselschaft fur Empirische Philosophie. Drugiego dnia sesji w późnych godzinach wieczornych wiedeński logik i matematyk Kurt Godel[28] wystąpił z krótkim komunikatem informującym o twierdzeniu o pełności. Mówiło ono, że przyjęty jako baza rekonstrukcji matematyki system logiki pierwszego rzędu jest adekwatny; prościej, Godel wykazał pełność systemu reguł logicznych. Odkrycie to było - jak widzimy - rozwiązaniem problemu d) z wykładu Hilberta w Bolonii w 1928 roku. Jednakże już następnego dnia odbyła się dyskusja, w której wziął udział także Godel. Zaanonsował on wtedy swoje słynne twierdzenie o niezupełności, które przeczy możliwościom realizacji klasycznego programu Hilberta:

Twierdzenie 1 (I Godla o niezupełności): Arytmetyka liczb naturalnych i wszystkie systemy bogatsze są niezupełne, o ile tylko są niesprzeczne. [29]

Twierdzenie to zostało formalnie ogłoszone i udowodnione w styczniu 1931 roku[30] i wtedy też dowiedział się o nim Hilbert. Jak pisze Smoryński „był zły z początku, wkrótce jednak zaczął szukać dróg wyjścia”. Cóż bowiem wynika z tego twierdzenia? Ano wynika między innymi, że istnieją w arytmetyce zdania nierozstrzygalne, czyli takie zdania φ, że ani φ, ani $\sim \varphi$ nie są twierdzeniami, przy czym jedno z nich jest oczywiście prawdziwe. Wkrótce okazało się też, że tej cechy niezupełności arytmetyki nie można usunąć poprzez np. dodanie zdań nierozstrzygalnych do aksjomatów (prowadziłoby to do utworzenia bogatszej teorii z nowymi zdaniami nierozstrzygalnymi, co można udowodnić). Konsekwencje tego twierdzenia są bardzo poważne i mało kto ma ich pełną świadomość. Oznacza ono bowiem, że nie można zawrzeć nawet całości teorii liczb naturalnych w niesprzecznym systemie sformalizowanym. Z punktu widzenia programu Hilberta, twierdzenie Godla udowodniło istnienie zdania realnego, które można udowodnić za pomocą metod infinitystycznych, ale które nie ma dowodu finitystycznego (podany został nawet przkład takiego zdania traktujący o liczbach naturalnych).

Jakby tego było mało, w tej samej publikacji z 1931 roku Godel zaanonsował także drugie twierdzenie o niezupełności, którego dowodu wszakże nigdy nie opublikował[31]:

Twierdzenie 2: (drugie Godla o niezupełności) W żadnej teorii sformalizowanej zawierającej arytmetykę liczb naturalnych nie można dowieść jej własnej niesprzeczności.

[28] Godel Kurt (1906-1978) - austriacki logik i matematyk; autor ważnych twierdzeń z zakresu logiki matematycznej, współautor jednej z aksjomatyk teorii mnogości; do najbardziej znanych osiągnięć matematycznych Godla należą twierdzenia o niezupełności i niesprzeczności bogatszych teorii dedukcyjnych (tzn. takich, w których można wprowadzić arytmetykę liczb naturalnych)

[29] Czytelnik domyśla się, że nie jest to dosłowna treść tego twierdzenia, ale jego wersja dostosowana do potrzeb niniejszego referatu.

[30] *„Monatshefte fur Mathematik und Psyhik”, 1/1931*

[31] Podał tylko wskazówki do przeprowadzenia dowodu, które okazały się później błędne. Na szczęście dowód został opracowany i podany przez Hilberta i bernaysa w drugim tomie „Grundlagen der Mathematik”

Konsekwencje tego twierdzenia są w zasadzie podobne do I twierdzenia, podałem je jednak dlatego, że niektórzy matematycy (np. Detlefsen) bronili tezy, że twierdzenie to nie pociąga obalenia programu Hilberta, ponieważ zdanie sformalizowanego języka arytmetyki liczb naturalnych orzekające, że jest ona niesprzeczna, nie wyraża istotnie niesprzeczności w sensie rozmienia jej przez Hilberta[32]

8 Uogólniony program Hilberta.

„Program Hilberta nie przyniósł oczekiwanych rezultatów"

To zdanie pochodzi z cytowanego wcześniej podręcznika H. Rasiowej i nie sposób się z nim nie zgodzić. Po ogłoszeniu przez Godla swoich twierdzeń podejmowano w zasadzie 2 większe próby ratowania programu Hilberta: poprzez rozszerzenie zasobu dostępnych środków w teorii dowodu (**uogólniony program Hilberta**) i poprzez próby wskazania części matematyki możliwych do ugruntowania w myśl idei Hilberta (**zrelatywizowany program Hilberta**). Należy jednak z całą mocą podkreślić, że działania te nie mają wiele wspólnego z samym programem Hilberta i jednoznacznie stwierdzić, że załamał się on około roku 1930. Dlatego też następne 2 paragrafy mają charakter uzupełniający.

Bernays[33] chyba jako pierwszy zapostulował dopuszczenie do dowodów infinitystycznych nie tylko metod finitystycznych, ale także **metod konstruktywnych**. Niestety, nie jest do końca jasne, co to takiego, „metody konstruktywne". Motywacją do ich zastosowania były prawdopodobnie wyniki Godla i Gentzena pokazujące względną niesprzeczność arytmetyki Peano i intuicjonistycznej arytmetyki Heytinga oraz dowód niesprzeczności arytmetyki Peano z użyciem indukcji pozaskończonej. Stosując indukcję pozaskończoną, którą od biedy można uznać za metodę konstruktywną i w ten sposób powiązać z programem Hilberta, Godel, Gentzen i Feferman otrzymali szereg interesujących wyników, z których wypływają 2 najważniejsze wnioski:

a) klasyczną analizę można rozwijać w zachowawczych rozszerzeniach elementarnej teorii liczb,
b) można podać za pomocą metod konstruktywnych dowody względnej niesprzeczności niepredykatywnych fragmentów arytmetyki II rzędu.

9. Zrelatywizowany program Hilberta.

Skoro nie można całej klasycznej matematyki infinitystycznej ugruntować na bazie matematyki finitystycznej, to przynajmniej jaką jej część można? Próba odpowiedzi na to pytanie to właśnie zrelatywizowany program Hilberta.

Przyjmijmy pojęcia finitystyczności i zdania realnego takie, jak zdefiniowane przez Taita (paragraf 4). Ponadto okazuje się, że matematykę można sformalizować nie tylko w teorii mnogości, ale spore jej fragmenty (np. geometrię, teorię liczb, analizę, równania różniczkowe, analizę zespoloną itp.) można sformalizować w systemie Z2 arytmetyki II rzędu

[32] Czytelnik domyśla się, że podobne dywagacje mają chrakter właściwie czysto filozoficzny. Swoją drogą ciekawe, skąd p. Detlefsen wiedział, jak Hilbert rozumiał niesprzeczność?

[33] Bernays Paul (1888-1977) - matematyk niemiecki, uczeń Hilberta, autor m.in. jednego z systemów aksjomatycznych teorii mnogości

(oznaczanej też jako A_2^-).[34] Formalizując matematykę w systemie Z2 unikamy szeregu kłopotów teoriomnogościowych (aksjomat wyboru, hipoteza continuum itp.), jednak natrafiamy na inne kłopoty, z czego najpoważniejszy wydaje się problem niepredykatywności arytmetyki Z2 (to właśnie w niepredykatywności Poincare dopatrywał się źródła paradoksów teorii mnogości). Zauważmy, że formuła φ występująca w aksjomacie wyróżniania może mieć postać $\forall Y\psi(Y,x,...)$, zatem definiując zbiór X za pomocą tak zdefiniowanej formuły odwołujemy się do ogółu tych wszystkich zbiorów, do których należy też X. Można tę trudność wyeliminować poprzez rozważanie przy formalizacji fragmentów matematyki klasycznej tylko tych kawałków arytmetyki Z2, w której aksjomat wyróżniania występuje w szczególnej postaci, uniemożliwiającej niepredykatywność.

W tym mniej więcej miejscu program Hilberta (lub w zasadzie jego pozostałości) wiąże się z innym programem badawczym, zwanym **matematką odwrotną**. Program ten, sformułowany przez H. Friedmana w 1974 roku w Vancouver zajmuje się, mówiąc w skrócie, właśnie **badaniem roli aksjomatu wyróżniania**. Pytania stawiane przez matematykę odwrotną wyglądają mniej więcej tak: Mamy dane pewne twierdzenie T, „ile" aksjomatu wyróżniania potrzeba, by dowieść T? A oto szkic rozwiązania takiego problemu: Załóżmy, że w pewnym fragmencie S(T) arytmetyki Z2 można udowodnić zdanie T. Czy S(T) jest istotnie najsłabszym (czyli najmniejszym) fragmentem Z2 o tej własności? Aby pokazać, że jest tak w istocie, udowadnia się, że aksjomat wyróżnienia w S(T) jest równoważny zdaniu T (przy czym dowód przeprowadza się na gruncie pewnej słabszej teorii, która sama nie dowodzi T). Łatwo się domyślić, że najtrudniejsza w takim dowodzie jest zawsze implikacja odwrotna $T\Rightarrow$ aksjomat wyróżniania teorii S(T). Przykład ten wyjaśnia też sam termin „matematyka odwrotna"; wyprowadzamy tu bowiem aksjomat z twierdzenia, czyli na odwrót niż w normalnej matematyce.

W ramach matematyki odwrotnej wyodrębniono kilka specyficznych fragmentów arytmetyki Z2, a mianowicie w szczególności teorie oznaczane RCA0, WKL0, ACA0, ATR0, Π_1^1-CA0. Zajmijmy się trzema z nich[35].

a) **system RCA0** (z angielskiego: Recursive Comprehension Axiom) to teoria oparta na języku teorii Z2 z następującymi aksjomatami pozalogicznymi:
   - aksjomaty arytmetyki Peano bez schematu indukcji,
   - schemat indukcji dla formuł w postaci $\exists x\varphi(x)$, gdzie φ jest formułą mogącą zawierać tylko formuły atomowe, spójniki i ewentualnie kwantyfikatory ograniczone (oznaczmy ją Σ_1^0):
     $\varphi(0)\wedge\forall x[\varphi(x)\Rightarrow\varphi(Sx)]\Rightarrow\forall x\varphi(x)$,

---

34 Arytmetyka II rzędu to system sformalizowany w języku I rzędu. Zmienne indywiduowe: x,y,z,... - dotyczą liczb naturalnych; zmienne wyższego rzędu: X, Y, Z... - dotyczą zbiorów liczb naturalnych; stałe pozalogiczna języka: $0,S,+,\cdot,\in$; aksjomaty pozalogiczne:

a) aksjomaty arytmetyki Peano bez schematu indukcji,

b) aksjomat ekstensjonalności: $\forall x(x\in X\Leftrightarrow x\in Y)\Rightarrow(X=Y)$,

c) aksjomat indukcji: $0\in X\wedge\forall x(x\in X\Rightarrow S(x)\in X)\Rightarrow\forall x(x\in X)$,

d) aksjomat wyróżniania: $\exists X\forall x(x\in X\Leftrightarrow\varphi(x,\dots))$, gdzie $\varphi(x,...)$ jest formułą języka taką, w której zmienna X nie jest wolna

35 Czytelnika zainteresowanego bliżej problemami matematyki odwrotnej i opisywanymi tu teoriami zachęcam do zaznajomienia się z opracowaniami naukowymi: *„Some subsystems of second order aithmetic and their use", H. Friedman w „Proceedings of the Internations Congres of Mathematicians", Canadian Mathematical Congress, Vancouver 1974; „Systems of second order arithmetic with restricted induction", H. Friedman, Journal of Symbolic Logic 41; „On the necessary use of abstract set theory", H. Friedman, Advances in Mathematics 41; „Countable algebra and set existence axioms", H. Friedman, S.G. Simpson, R.L. Smith, Annals of Pure and Applied Logic 25;* interesująca jest także polska pozycja o zbliżonej tematyce, acz z nieco odmiennej dziedziny: *„Metody aksjomatyczne w geometrii i fizyce", L. Dubikajtis, Wydawnictwo Uniwersytetu im. Mikołaja Kopernika, Toruń 1968* (proszę zwrócić uwagę na datę publikacji!)

- (rekurencyjny aksjomat wyróżniania):
  $$\forall x[\varphi(x) \Leftrightarrow \psi(x)] \Rightarrow \exists X \forall x[x \in X \Leftrightarrow \varphi(x)],$$
  gdzie φ jest formułą Σ_1^0 a ψ Π_1^0.

b) **teoria WKL0** (Weak Konig's Lemma) to teoria oparta na języku arytmetyki Z2 z następującymi aksjomatami pozalogicznymi:
- aksjomaty teorii RCA0,
- słaby lemat Koniga, tj. zdanie głoszące, że każde nieskończone drzewo dwójkowe ma gałąź nieskończoną

c) **teoria ACA0** (Arithmetic Comprhension Axiom) to teoria oparta na języku arytmetyki Z2 z następującymi aksjomatami pozalogicznymi:
- aksjomaty arytmetyki Peano bez aksjomatu indukcji,
- aksjomat ekstensjonalności,
- aksjomat indukcji, tzn.
  $$0 \in X \wedge \forall x[x \in X \Rightarrow S(x) \in X] \Rightarrow \forall x(x \in X)$$
- arytmetyczny schemat wyróżniania, tj. schemat wyróżniania dla wszystkich formuł arytmetycznych, czyli formuł języka arytmetyki Z2 nie zawierających kwantyfikatorów wiążących zmienne zbiorowe.

Tyle definicji. Wracając zaś do głównego nurtu naszych rozważań, jakie części matematyki klasycznej można sformalizować i ugruntować w omówionych powyżej teoriach? I tak mamy:

a) w teorii RCA0 można między innymi:
- skonstruować liczby rzeczywiste,
- zdefiniować pojęcie zbieżności ciągu,
- zdefiniować pojęcie funkcji ciągłej,
- uściślić pojęcie całki Riemana,
- udowodnić szereg pozytywnych wyników algebry i analizy rekurencyjnych, w szczególności twierdzenie o wartości średniej dla funkcji ciągłych;

b) w teorii WKL0 można jeszcze więcej, w tym:
- udowodnić tw. Heinego-Borela o pokryciu,
- udowodnić, że każda funkcja ciągła na przedziale [0,1] jest jednostajnie ciągła,
- udowodnić, że każda funkcja ciągła na przedziale [0,1] jest ograniczona,
- udowodnić, że każda funkcja ciągła na przedziale [0,1] ma supremum,
- udowodnić, że każda funkcja jednostajnie ciągła na przedziale [0,1], mająca supremum, osiąga je,
- udowodnić tw. Hahna-Banacha,
- udowodnić tw. Cauchy'ego-Peano o istnieniu całki równania różniczkowego,
- udowodnić, że każdy pzeliczlny pierścień przemienny ma ideał pierwszy,
- udowodnić, że każde ciało przeliczalne formalnie rzeczywiste może być uporządkowane,
- udowodnić tw. Godla o pełności dla rachunku predykatów,

ponadto można pokazać, że jeśli T jest jednym z wyżej wymienionych twierdzeń matematyki klasycznej, to teoria RCA0 plus twierdzenie T jest równoważna teorii WKL0, czyli że moc dowodowa tych teorii jest taka sama (tzn. te same twierdzenia mogą być w nich udowodnione),

c) w teorii ACA0, będącej, jak to chyba dostrzegamy, rozszerzeniem teorii WKL0, można udowodnić jeszcze więcej! Na przykład:
   - twierdzenie Bolzano-Weierstrassa,
   - każdy ciąg Cauchy'ego liczb rzeczywistych jest zbieżny,
   - każdy ciąg ograniczony liczb rzeczywistych ma supremum,
   - każdy ciąg ograniczony liczb rzeczywistych jest zbieżny,
   - lemat Arzeli-Ascoliego,
   - każda przeliczalna przestrzeń liniowa ma bazę,
   - każdy przeliczalny pierścień przemienny ma ideał maksymalny,

   i podobnie jak w teorii WKL0, jeżeli T jest jednym z powyższych twierdzeń i dołączymy T do teorii RCA0, to powstała tak teoria będzie równoważna teorii ACA0. Zauważmy przy tym, że skoro teoria RCA0 + T jest równoważna ACA0, to z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa możemy wydedukować na bazie teorii RCA0 np. twierdzenie o istnieniu bazy przestrzeni liniowej. Zaskakujące, czyż nie?

Cóż to jednak ma wspólnego z programem Hilberta? Otóż powyższe wyniki pokazują, jaka część arytmetyki Z2 jest tak naprawdę potrzebna do pełnego sformalizowania danego fragmentu matematyki klasycznej. Ma to też pewne znaczenie praktyczne i - jeśli można tak powiedzieć - dydaktyczne. Otóż okazuje się, że logika matematyczna i podstawy matematyki mają istotny związek ze „zwykłą” matematyką, co więcej, ściśle ją determinują!

Trzeba tu jednak zwrócić uwagę na jeden istotny fakt. Wbrew pozorom takie sformalizowane dowody nie są „tłumaczeniem” dowodów klasycznych. Różnią się od nich i to dosyć znacznie; na przykład sformalizowane dowody jedyności są niezwykle rozbudowane i powikłane, podczas gdy dowody istnienia są stosunkowo krótkie i przejrzyste - w matematyce klasycznej jakże często bywa na odwrót! Nie ma też żadnego związku pomiędzy złożonością dowodu sformalizowanego a jego klasycznym odpowiednikiem.

Dodatkowo „różowy i sielankowy” obraz matematyki odwrotnej przesłania fakt, że są takie krnąbrne twierdzenia, które np. można udowodnić w teorii ACA0, ale które po dodaniu do teorii RCA0 tworzą system, który nie jest równoważny z ACA0 ani z WKL0, tzn. twierdzenia takiego nie można ująć w ramy klasyfikacji Friedmana.

Na domiar złego istnieją twierdzenia, które można udowodnić w teorii mnogości Zermelo-Fraenkla, ale nie da się pokazać nawet w pełnym systemie Z2 (czyżby niepredykatywność?).

Wracając do omawianych teorii... L. Harrington i Z. Ratajczyk wykazali (lecz nie opublikowali dowodu!), że teoria WKL0 jest zachowawcza. Pozwolę sobie przytoczyć treść tego twierdzenia, aczkolwiek bez jego analizowania[36]:

[36] W tym celu konieczne byłoby wprowadzenie pojęcia modelu i uniwersum, co znacznie przekracza, i tak już przekroczone, ramy tego referatu.

Twierdzenie 3 (Harringtona-Ratajczyka) Jeżeli $(X, M, \in)$ jest przeliczalnym modelem teorii RCA0 i zbiór $A \in X$, to istnieje rodzina $Y \subseteq P(M)$ taka, że $A \in Y$ oraz $(Y, M, \in)$ jest modelem dla WKL0.

Nas bardziej interesuje wniosek wypływający z tego twierdzenia. Mianowicie teoria WKL0 jest zachowawczym rozszerzeniem teorii RCA0 względem zdań klasy Π_1^1, gdzie Π_1^1 oznacza zdania języka arytmetyki Z2 postaci $\forall X \varphi(X)$, gdzie φ jest formułą arytmetyczną. Zatem jest to klasa zdań zawierających tylko jeden duży kwantyfikator wiążący zmienną zbiorową oraz dowolną liczbę kwantyfikatorów wiążących zmienne liczbowe.

W 1977 roku Friedman rozszerzył nieco twierdzenie Harringtona-Ratajczyka, mianowicie udowodnił:

Twierdzenie 4 (Friedmana): Teoria WKL0 jest zachowawczym rozszerzeniem systemu arytmetyki Skolema względem zdań Π_2^0.[37]

Uwaga: zdania klasy Π_2^0 to zdania języka arytmetyki Peano postaci $\forall x \exists y \psi(x, y)$, gdzie ψ oznacza formułę mogącą zawierać formuły atomowe, spójniki i ewentualnie kwantyfikatory ograniczone.

Łącząc powyższe wyniki i uświadamiając sobie moc dowodową teorii RCA0, WKL0 i ACA0 dochodzimy do wniosku, że całkiem spory kawałek matematyki można zredukować do teorii arytmetyki Skolema, zaś przyjmując Tait'eowską definicję finitystyczności, dochodzimy wręcz do wniosku, że ów całkiem spory kawałek matematyki (dokładnie te twierdzenia, które da się sformułować jako zdania Π_2^0) można ugruntować finitystycznie. A zatem program Hilberta może być częściowo zralizowany, aczkolwiek zapewne nie tak, jak Hilbert to sobie wyobrażał... Miejmy jednak nadzieję, że wielki niemiecki matematyk byłby zadowolony z dzisiejszych wyników!

Bibliografia:

1. *„Rozwój programu Hilberta", Roman Murawski, w „Wiadomości Matematyczne" XXX.1, Warszawa 1993,*
2. *„Elementy historii matematyki", Nicolas Bourbaki, tłum. Stanisław Dobrzycki, PWN, Warszawa 1980,*
3. *„Próba formalizacji Husserlowskiej teorii części i całości", Marek Rosiak, w „Filozofia/Logika. Filozofia logiczna 1994", Wydawnictwo Uniwersytetu im. Mikołaja Kopernika, Toruń 1995,*
4. *„Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych", Roman Murawski, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań 1990.*

[37] W 1988 roku W. Sieg pokazał sposób na pierwotnie rekurencyjne tłumaczenie dowodów takich zdań w teorii WKL0 na dowody w arytmetyce Skolema.