

# Podstawy matematyki a mechanika kwantowa

Paweł Klimasara

Uniwersytet Śląski

9 maja 2015

# PLAN PREZENTACJI

- 1 Mechanika kwantowa a teorie klasyczne
- 2 Podstawy matematyki
- 3 Teoria modeli a mechanika kwantowa
- 4 Algebry w mechanice kwantowej
- 5 Teoria toposów a fizyka
- 6 "Klasyczna" mechanika kwantowa?
- 7 "Czysty" forsing w MK
- 8 Wnioski

# JAK SPRAWIĆ, BY MECHANIKA KWANTOWA BYŁA "BARDZIEJ KLASYCZNA" ?

Dość oczywistą różnicą pomiędzy mechaniką kwantową, a teoriami klasycznymi jest brak równoczesnego pomiaru obserwabli niekomutujących.

## TWIERDZENIE KOCHENA - SPECKERA (1967)

W MK opartej na przestrzeniach Hilberta o wymiarze  $> 2$  nie istnieje globalne przyporządkowanie (przed i po pomiarze) wartości rzeczywistych do obserwabli.

### MECHANIKA KWANTOWA

Brak globalnego wartościowania obserwabli niekomutujących.

### TEORIE KLASYCZNE

Obserwable mają "odgórnie" przyporządkowane wartości.

## NIEJEDNOZNACZNOŚĆ TEORII KONTEKSTUALNYCH

Próba wskazania tej niejednoznaczności na poziomie formalnym - poszukujemy odpowiedzi w podstawach matematyki.

# FUNDAMENTALNA NIEJEDNOZNACZNOŚĆ W MATEMATYCE

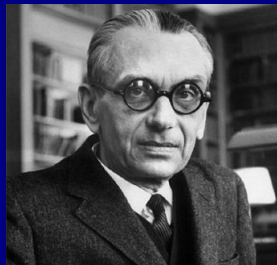
## TEORIA MNOGOŚCI ZFC:

Podstawa (prawie) całej matematyki.

## MODEL TEORII MNOGOŚCI

Matematyczne uniwersum, w którym twierdzenia tej teorii są spełnione.

TEORIA MNOGOŚCI ZFC MA NIESKOŃCZENIE WIELE NIEIZOMORFICZNYCH MODELII - BRAK "JEDYNEGO", "UNIKALNEGO" UNIWERSUM DLA MATEMATYKI!



Kurt Gödel (1906 - 1978)

Jaka jest zasadnicza różnica pomiędzy takimi nieizomorficznymi modelami ZFC?

# NARZĘDZIA FORMALNE LOGIKI MATEMATYCZNEJ

Okazuje się, że w różnych modelach ZFC mamy różne zbiory liczb rzeczywistych, tj. pewien formalny obiekt może być liczbą rzeczywistą w jednym modelu, a w innym już nie.

W 1964 PAUL COHEN ROZWIĄZAŁ  
SŁYNNY PROBLEM - HIPOTEZĘ  
CONTINUUM ( $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ),  
WPROWADZAJĄC NOWĄ TECHNIKĘ  
DOWODOWĄ - **FORŠING**



Paul Cohen (1934 - 2007)

Dla nas, kluczową informacją jest, że foršing to formalne narzędzie pozwalające na rozszerzenie danego modelu ZFC poprzez, mówiąc w dużym uproszczeniu, dodanie pewnych "brakujących" liczb rzeczywistych.

Ale czy potrzebujemy abstrakcyjnych metod teorii modeli w MK?

# PROPOZYCJA UŻYCIA FORSINGU W MECHANICE KWANTOWEJ

Paul A. Benioff (1976)

NIE ISTNIEJE MODEL ZFC, W KTÓRYM  
MOŻNA BY WYRAZIĆ POPRAWNIE  
MATEMATYKĘ MECHANIKI KWANTOWEJ  
I JEJ STATYSTYCZNE PRZEWIDYWANIA

Wobec tego, aby użyć standardowych podstaw  
matematyki do opisu mechaniki kwantowej,  
powinniśmy raczej skupić się na pewnej  
"dynamice" pomiędzy wieloma modelami ZFC



Paul A. Benioff

Forsing - formalna reprezentacja pomiaru?

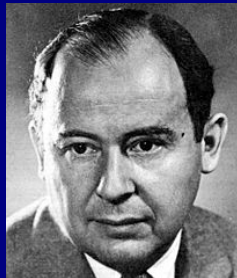
"Ominiemy" ograniczenia narzucane przez twierdzenie Kochena-Speckera, jeżeli zmienimy odpowiednio matematyczne uniwersum po pomiarze. Wtedy brakujące wartości rzeczywiste, przypisane do obserwabli poprzez pomiar, są obecne w nowym modelu po pomiarze.

# STRUKTURY ALGEBRAICZNE W FIZYCE

John von Neumann (1932)

Mechanikę kwantową można wyrazić poprzez nieprzemienne  $C^*$ -algebry obserwabli.

Z drugiej strony teorie klasyczne mogą być reprezentowane poprzez przemienne  $C^*$ -algebry.



John von Neumann (1903 - 1957)

Gdyby udało się znaleźć matematyczne uniwersum, po przejściu do którego nasze nieprzemienne  $C^*$ -algebry stałyby się przemienne, to możliwe byłoby opisanie MK poprzez teorię klasyczną.

**ALE CZY TAKIE UNIWERSUM ISTNIEJE?**

# ODPOWIEDŹ W NOWYCH PODSTAWACH MATEMATYKI?

"Standardowa" matematyka - oparta na teorii zbiorów (ZFC)

Podstawowa struktura: zbiór. [stat.]

"Nowa" matematyka - oparta na teorii kategorii

Podstawowa struktura: kategoria, tj. obiekty połączone strzałkami. [dynam.]

Pewne szczególne kategorie, zwane toposami, odgrywają dla nas kluczową rolę.

Twierdzenie Banaschewski'ego - Mulveya (2006)

Dla każdej nieprzemiennej  $C^*$ -algebry operatorów można skonstruować topos, wewnątrz którego ta struktura staje się **przemiennej**  $C^*$ -algebrą.

Wspólny element obu podejść do problemu

Interesujący sam w sobie jest fakt, że toposy są kategoriami opartymi na logice forsinu - opisują zmienność modeli ZFC.



# CENA PRZEKSZTAŁCENIA MK W "KLASYCZNA" (W TOPOSIE SPEKTRALNYM)

ZAMIANA TEORII MNOGOŚCI NA TEORIĘ KATEGORII WYMUSZA ZMIANĘ LOGIKI KLASYCZNEJ NA INTUICJONISTYCZNĄ - CO WYWOŁUJE POWAŻNE KONSEKWENCJE NA POZIOMIE FORMALNYM

Konsekwencje takiego użycia toposów:

- Nie mamy dowodów nie wprost,
- Brak prawa wyłączonego środka,
- Rezygnacja z aksjomatu wyboru.

PRAWO WYŁĄCZONEGO ŚRODKA

$$(p \vee \neg p) \leftrightarrow 1$$

W SZCZEGÓLNOŚCI, TAKA "KLASYCZNA" MK BYŁABY NARZĘDZIEM POZWALAJĄCYM NA PRZEPROWADZANIE KWANTOWOMECHANICZNYCH OBLICZEŃ W TAKI SPOSÓB, JAK W PRZYPADKU KLASYCZNYCH TEORII.

# "CZYSTY" FORSING W MECHANICE KWANTOWEJ

Pozytywne rezultaty w LHV (Robert A. van Wesep, 2006)

- Wyprowadzenie zasady Borna,
- Własności algebr Boole'a operatorów rzutowych,
- Wprowadzenie pojęcia **STANU SEMIKLASYCZNEGO**.

## PRZEJŚCIE DO PRZESTRZENI HILBERTA ULTRAFILTRÓW

Razem z dr. hab. Jerzym Królem, pokazaliśmy że:

Pewien **specjalny forsing** (forsing na algebrze Boole'a miary) jest **koniecznym** etapem przejścia od **mechaniki kwantowej** do klasycznych **ciągłych położeń** parametryzowanych liczbami z osi liczb rzeczywistych (a tak przyjmuje się w każdym różnorodnościowym modelu czasoprzestrzeni).

**ISTNIENIE STANÓW SEMIKLASYCZNYCH DLA ALGEBR NIATOMOWYCH (OBSERWABLE CIĄGLE) - LHV NIE JEST POTRZEBNE**

# PODSUMOWANIE I PERSPEKTYWY

## TOPOSY W FIZYCE:

- Alternatywne podejście do teorii mnogości,
- Szkoły Landsmana i Ishama.

### Zasada towariancji (N.P. Landsman, 2007)

Teorie fizyczne powinny być niezależne od wyboru toposu - zawsze istnieje możliwość (formalnego) "przekształcenia" "klasycznej" MK, opartej na pewnym toposie, do MK opartej na modelach standardowej teorii mnogości [ZFC] (i odwrotnie).

## FORMALNE PRZEJŚCIE OD MIKRO DO MAKRO-SKALI

### PLANY BADAWCZE:

- Nieregularna na poziomie forsinu oś liczbowa (zamiast pełnej regularnej) może być użyta do modelowania czasoprzestrzeni w erze Plancka. Celem jest generowanie pewnych nieregularności w CMB z takiego modelu czasoprzestrzeni i porównanie z wynikami misji sondy kosmicznej PLANCK.



Dziękuję za uwagę